

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Programma del Corso di Analisi Matematica 5

Docente: Paolo Baiti

Definizioni di base ed alcuni richiami. Definizione di equazione/sistema di equazioni differenziali ordinarie (EDO); soluzione di un'equazione/sistema, traiettoria ed orbita di una soluzione. Equazioni e sistemi in forma normale. Sistemi autonomi. Riduzione di un'equazione in forma normale di ordine n ad un sistema di n equazioni di ordine 1. Il problema di Cauchy. Richiami sul teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza ed unicità locale. Esempi di approssimazione con le iterate di Picard.

Il teorema di esistenza locale di Peano. Richiami sugli spazi metrici e compattezza in spazi metrici. Spazi topologici separabili. Gli spazi metrici compatti sono separabili. Insiemi compatti e relativamente compatti in $C(E, R)$; insiemi equicontinui ed equiuniformemente continui. Il teorema di Ascoli-Arzelà. Introduzione al metodo delle poligonali di Eulero. Il teorema di Peano: dimostrazione dell'esistenza di una soluzione tramite approssimazione con le poligonali di Eulero. Cenni di altre dimostrazioni.

Analisi qualitativa delle soluzioni. Questioni legate all'unicità delle soluzioni: l'unicità locale implica l'unicità globale. Conseguenze dell'unicità sulle traiettorie e sulle orbite delle soluzioni. Il fenomeno di Peano, integrale superiore ed inferiore (cenni). Prolungabilità delle soluzioni. Soluzioni massimali e intervallo massimale d'esistenza. L'intervallo massimale d'esistenza è aperto. Teorema di esistenza delle soluzioni massimali nel caso in cui il campo vettoriale è localmente lipschitziano oppure continuo. Il grafico di una soluzione massimale è chiuso nella topologia indotta. Fuga dai compatti. Esplosione delle soluzioni in tempo finito. Alcune conseguenze del teorema della fuga dai compatti: compattezza e limitatezza implicano l'esistenza in grande. Il metodo delle funzioni ausiliarie; la sublinearità implica l'esistenza in grande delle soluzioni; la lipschitzianità globale implica l'esistenza in grande delle soluzioni. I sistemi lineari a coefficienti continui hanno esistenza ed unicità in grande delle soluzioni. Esistenza ed unicità per equazioni scalari di ordine n . Il teorema del confronto (due versioni). Il teorema di dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali e dal campo vettoriale (solo enunciato). Il criterio dell'asintoto ed alcune sue conseguenze. Sistemi autonomi ed integrali primi. Sistemi conservativi. Sistemi fisici conservativi; caso dell'energia. Applicazione degli strumenti introdotti allo studio qualitativo delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali. Il pendolo non lineare: analisi qualitativa delle soluzioni.

Alcune classi di equazioni risolubili analiticamente. Equazioni a variabili separabili. Equazioni omogenee e loro varianti. Formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui. L'equazione di Bernoulli. L'equazione di Malthus e l'equazione logistica di Verhulst; risoluzione ed analisi dei modelli. La 1-forma associata ad un sistema autonomo di equazioni nel piano e suo utilizzo per trovare un integrale primo del sistema. Analisi del modello nonlineare preda-predatore di Lotka-Volterra. Equazioni autonome del secondo ordine del tipo $y'' = f(y, y')$. Equazioni non in forma normale del tipo $y = g(y')$ oppure $t = g(y')$; applicazione al problema della brachistocrona.

Sistemi ed equazioni lineari. Sistemi lineari. Sistema omogeneo associato. La soluzione generale di un sistema lineare è somma della generica soluzione del sistema omogeneo e di una qualsiasi soluzione fissata del sistema. L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è uno spazio vettoriale di dimensione n . Matrice soluzione e matrice fondamentale (risolvente). Teorema di Lagrange e formula di variazione delle costanti. Sistemi lineari a coefficienti costanti. Esponenziale di una matrice: definizione e proprietà. Soluzione del problema di Cauchy associato ad un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti. Calcolo esplicito dell'esponenziale di una matrice in alcuni casi particolari: matrice multipla dell'identità, matrice di rotazione 2×2 , matrice diagonalizzabile reale. Decomposizione di una matrice nella somma di una matrice diagonalizzabile e di una nilpotente (senza dim) con applicazioni al calcolo della matrice esponenziale. Forma canonica di Jordan (senza dim): caso delle matrici 2×2 e 3×3 , cenni al caso generale; applicazione ai sistemi lineari. Applicazione della teoria svolta alle equazioni differenziali ordinarie di ordine n a coefficienti costanti.

La misura e la misura esterna di Lebesgue in \mathbb{R}^n . La misura di Lebesgue: insufficienza della misura di Peano-Jordan. L'insieme ternario di Cantor e una sua generalizzazione (cenni). σ -algebre di parti di \mathbb{R}^n e misure sulle σ -algebre. Misura esterna di Lebesgue in \mathbb{R}^n e sue proprietà. La misura esterna dei plurintervalli. Definizione di Caratheodory di insieme misurabile. I plurintervalli sono insiemi misurabili. Teorema di Caratheodory: l'insieme dei sottoinsiemi misurabili forma una σ -algebra e la misura esterna ristretta ai misurabili è numerabilmente additiva. La misura di Lebesgue. Gli aperti e i chiusi sono insiemi misurabili. La misura dei punti, di \mathbb{Q} e dell'insieme di Cantor. Esempio di insieme compatto privo di punti interni e con misura positiva. Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue. L'insieme non misurabile di Vitali e sue conseguenze. Il paradosso di Banach-Tarski (cenni). La σ -algebra generata da un insieme. La σ -algebra dei boreliani. G_δ -insiemi e F_σ -insiemi. Alcune caratterizzazioni degli insiemi misurabili: approssimazioni con aperti dall'esterno, con chiusi dall'interno, con boreliani e con unioni finite di intervalli a due a due disgiunti.