



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

ANALISI MATEMATICA 5

Appello del 6 luglio 2010

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = y \operatorname{tg} \left(\frac{y}{2t^2} \right) \quad (1)$$

- determinare l'aperto di definizione Ω e disegnarlo nel piano (t, y) ; studiare l'esistenza ed unicità locale per i problemi di Cauchy associati;
- determinare gli eventuali punti di equilibrio;
- individuare le sottoregioni di Ω nelle quali le soluzioni sono crescenti oppure decrescenti;
- supposto che $y(t)$ sia soluzione, e posto $z(t) = -y(t)$, $w(t) = -y(-t)$, dire quale eventualmente tra $z(t)$ e $w(t)$ è ancora soluzione dell'equazione. È vero che le soluzioni sono funzioni dispari?
- nel seguito sia $y :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy associato con $y(1) = 1$. Verificare che la funzione $x(t) = t$ è soprassoluzione per $t \geq 1$. Dimostrare quindi che $y(t)$ è globalmente definita in futuro (cioè $\beta = +\infty$);
- calcolare α ; dimostrare che esiste il $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} y(t)$ e calcolarlo;
- dimostrare che esiste finito il $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ e darne una stima per difetto e una per eccesso.

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

- calcolare la matrice fondamentale e^{tA} ;
- risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(0) = \bar{y}, \end{cases}$$

$$\text{dove } \bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } b(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Punteggi indicativi: 2+2+3+4+8+5+20, 5+4