Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Appello del 16 febbraio 2010

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. È ammesso l'utilizzo degli appunti del corso. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Dato il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} x' = 2xy + y^2 \\ y' = -2yx^3 - 4x^4, \end{cases} \tag{1}$$

a) verificare che si ha esistenza ed unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy associato e determinare gli equilibri del sistema.

Considerata la 1-forma differenziale associata $\omega(x,y) := (2yx^3 + 4x^4)dx + (2xy + y^2)dy$,

b) verificare che ω non è una forma esatta in $\mathbb{R}^2$;
c) determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che $\lambda(x,y) := \frac{1}{ax+by}$ sia un fattore integrante per ω ed utilizzarlo per trovare un integrale primo del sistema in $\Omega_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by > 0\}$ e $\Omega_- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by < 0\}$; trovare quindi un integrale primo del sistema (1) in $\mathbb{R}^2$ e disegnarne qualitativamente gli insiemi di livello;
d) utilizzare c) per dimostrare che tutte le soluzioni massimali sono globalmente definite. Esistono soluzioni che esplodono in norma? e soluzioni periodiche non costanti?
e) Detta $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ la soluzione massimale del sistema con dati iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 2)$, dimostrare che esistono i limiti $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$ e calcolarli.

2 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{(y + 2t - 1)^2 - 3}{y + 2t + 1} \tag{2}$$

nell'aperto $\Omega := \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2t + 1 > 0\}$

a) verificare che si ha esistenza ed unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy associato;
b) trovare $c \in \mathbb{R}$ affinché la funzione $\bar{y}(t) = ct$ sia soluzione;
c) posto $z(t) = y(t) - ct$, dove c è relativo al punto b), determinare l'equazione differenziale soddisfatta da z e trovare le relative soluzioni in forma implicita, ad esempio mediante il metodo di separazione delle variabili;
d) utilizzare c) per studiare l'intervallo massimale di esistenza del problema di Cauchy relativo a (2) con dato iniziale $y(t_0) = y_0$ al variare di $(t_0, y_0) \in \Omega$. In particolare verificare che la soluzione y_1 con dato iniziale $y(0) = 4$ è globalmente definita mentre la soluzione y_2 con dato iniziale $y(0) = -1/2$ è globalmente definita in futuro ma non in passato;
e) utilizzare a)-d) per dimostrare l'esistenza dei limiti $\lim_{t\to\pm\infty} y_1(t)$ e calcolarli;
f) detto $]\alpha, +\infty[$ l'intervallo massimale d'esistenza di y_2, calcolare α e il $\lim_{t\to\alpha^+} y_2(t)$.
g) Per risolvere e) procedere alternativamente come segue: i) dimostrare che $\bar{y}(t) < y_1(t)$ per ogni $t \le 0$; ii) trovare una sottosoluzione di y_1 per $t \ge 0$ della forma $w(t) = mt + 4$ per un opportuno valore di m e concludere utilizzando il criterio del confronto.
h) Estendendo opportunamente il criterio di sublinearità o di globale lipschitzianità dimostrare che le soluzioni dei problemi di Cauchy con dati $y(t_0) = y_0 > \bar{y}(t_0)$ sono globalmente definite.

Punteggi indicativi: 4+2+5+4+6, 2+3+4+5+4+3+6+15