Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Appello del 3 febbraio 2010

$\boxed{1}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-ty}{y} \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

a) studiare l'esistenza e l'unicità locale delle soluzioni e le regioni di piano dove le soluzioni sono crescenti/decrescenti;

b) dimostrare che ammette una soluzione globalmente definita in futuro. È unica?

Per ciascuna delle soluzioni massimali $y(t)$, o eventualmente per l'unica soluzione,

c) provare che esiste il $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ e calcolarlo;

d) dimostrare che $y(t)$ non è definita globalmente in passato;

e) detto $]\alpha,+\infty[$ l'intervallo massimale di esistenza di $y(t)$, dimostrare che in ogni caso esiste il $\lim_{t\to\alpha^-} y(t)$ e calcolarlo. Disegnare infine un grafico qualitativo di y.

f) dare una stima per difetto di α.

(Suggerimento: in b) come anche in alcuni dei punti successivi potrebbe risultare utile applicare opportunamente il teorema del confronto.)

$\boxed{2}$ Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2+a & -1+a+2a^2 & a \\ 1 & 4 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA} nei casi $a = 0$ e $a = 1$;

b) nel caso $a = 0$ risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = (2,-1,1). \end{cases}$$

c) Dire se è possibile trovare a affinché: i) ogni soluzione di $y' = Ay$ sia globalmente limitata; ii) ogni soluzione di $y' = Ay$ sia limitata in futuro.

Punteggi: 4+6+4+5+4+10, 8+3+6

Appello del 16 febbraio 2010

$\boxed{1}$ Dato il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} x' = 2xy + y^2 \\ y' = -2yx^3 - 4x^4, \end{cases} \tag{1}$$

a) verificare che si ha esistenza ed unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy associato e determinare gli equilibri del sistema.

Considerata la 1-forma differenziale associata $\omega(x,y) := (2yx^3 + 4x^4)dx + (2xy + y^2)dy$,

b) verificare che ω non è una forma esatta in $\mathbb{R}^2$;

c) determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che $\lambda(x,y) := \frac{1}{ax+by}$ sia un fattore integrante per ω ed utilizzarlo per trovare un integrale primo del sistema in $\Omega_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by > 0\}$ e $\Omega_- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by < 0\}$; trovare quindi un integrale primo del sistema (1) in $\mathbb{R}^2$ e disegnarne qualitativamente gli insiemi di livello;

d) utilizzare c) per dimostrare che tutte le soluzioni massimali sono globalmente definite. Esistono soluzioni che esplodono in norma? e soluzioni periodiche non costanti?

e) Detta $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ la soluzione massimale del sistema con dati iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 2)$, dimostrare che esistono i limiti $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$ e calcolarli.

2 Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{(y + 2t - 1)^2 - 3}{y + 2t + 1} \tag{2}$$

nell'aperto $\Omega := \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2t + 1 > 0\}$

a) verificare che si ha esistenza ed unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy associato;

b) trovare $c \in \mathbb{R}$ affinché la funzione $\bar{y}(t) = ct$ sia soluzione;

c) posto $z(t) = y(t) - ct$, dove c è relativo al punto b), determinare l'equazione differenziale soddisfatta da z e trovare le relative soluzioni in forma implicita, ad esempio mediante il metodo di separazione delle variabili;

d) utilizzare c) per studiare l'intervallo massimale di esistenza del problema di Cauchy relativo a (2) con dato iniziale $y(t_0) = y_0$ al variare di $(t_0, y_0) \in \Omega$. In particolare verificare che la soluzione y_1 con dato iniziale $y(0) = 4$ è globalmente definita mentre la soluzione y_2 con dato iniziale $y(0) = -1/2$ è globalmente definita in futuro ma non in passato;

e) utilizzare a)-d) per dimostrare l'esistenza dei limiti $\lim_{t\to\pm\infty} y_1(t)$ e calcolarli;

f) detto $]\alpha, +\infty[$ l'intervallo massimale d'esistenza di y_2, calcolare α e il $\lim_{t\to\alpha^+} y_2(t)$.

g) Per risolvere e) procedere alternativamente come segue: i) dimostrare che $\bar{y}(t) < y_1(t)$ per ogni $t \leq 0$; ii) trovare una sottosoluzione di y_1 per $t \geq 0$ della forma $w(t) = mt + 4$ per un opportuno valore di m e concludere utilizzando il criterio del confronto.

h) Estendendo opportunamente il criterio di sublinearità o di globale lipschitzianità dimostrare che le soluzioni dei problemi di Cauchy con dati $y(t_0) = y_0 > \bar{y}(t_0)$ sono globalmente definite.

Punteggi indicativi: 4+2+5+4+6, 2+3+4+5+4+3+6+15

Appello del 6 luglio 2010

1 Data l'equazione differenziale

$$y' = y \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2t^2}\right) \tag{3}$$

a) determinare l'aperto di definizione Ω e disegnarlo nel piano (t, y); studiare l'esistenza ed unicità locale per i problemi di Cauchy associati;

b) determinare gli eventuali punti di equilibrio;

c) individuare le sottoregioni di Ω nelle quali le soluzioni sono crescenti oppure decrescenti;

d) supposto che $y(t)$ sia soluzione, e posto $z(t) = -y(t)$, $w(t) = -y(-t)$, dire quale eventualmente tra $z(t)$ e $w(t)$ è ancora soluzione dell'equazione. È vero che le soluzioni sono funzioni dispari?

e) nel seguito sia $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy associato con $y(1) = 1$. Verificare che la funzione $x(t) = t$ è soprasoluzione per $t \geq 1$. Dimostrare quindi che $y(t)$ è globalmente definita in futuro (cioè $\beta = +\infty$);

f) calcolare α; dimostrare che esiste il $\lim_{t\to\alpha^+} y(t)$ e calcolarlo;

g) dimostrare che esiste finito il $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ e darne una stima per difetto e una per eccesso.

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA};

b) risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(0) = \bar{y}, \end{cases}$$

dove $\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $b(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$.

Punteggi indicativi: 2+2+3+4+8+5+20, 5+4

Appello del 21 settembre 2010

1 Dato il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} x' = y + x - x^3 - xy^2 \\ y' = y - x - yx^2 - y^3, \end{cases}$$

a) verificare che si ha esistenza ed unicità locale per le soluzioni dei problemi di Cauchy associati;

b) determinare gli equilibri del sistema;

c) verificare che la funzione $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$ è una soluzione del sistema e disegnarne l'orbita nel piano (x, y);

d) considerata la soluzione $(x(t), y(t))$ del problema di Cauchy associato con dati iniziali $(x(0), y(0)) = (1/\sqrt{3}, 0)$, provare che è globalmente definita;

e) dimostrare che la norma euclidea della soluzione è crescente e utilizzare questa proprietà per studiare il comportamento della soluzione per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$;

f) trovare esplicitamente la soluzione del punto d) (Suggerimento: utilizzare una simmetria del problema.)

2 Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

a) calcolare la matrice fondamentale e^{tA};

b) dimostrare che al variare di $\bar{y}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = \bar{y}, \end{cases}$$

ammette sempre un'unica soluzione globalmente definita e globalmente limitata in futuro. Cosa si può dire della limitatezza in passato?

Si consideri ora l'equazione $y' = Ay + b(t)$ dove $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è una funzione continua. Discutere l'esistenza globale delle soluzioni. Dimostrare che

c) se b è costante tutte le soluzioni sono globalmente limitate in futuro;

d) esistono funzioni b non costanti ma limitate per le quali le soluzioni non sono globalmente limitate in futuro.

Punteggi indicativi: 2+4+3+6+10+10, 6+4+4+6