Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

19 gennaio 2010

1 Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_{-1}^{2}(x^3-3x-2)\,dx, \qquad \int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx, \qquad \int_{1/2}^{2}\frac{x^3-2\ln^2 x}{x}\,dx.$$

2 Calcolare i seguenti integrali mediante il metodo di integrazione per parti

$$\int (3x^2-4x+1)\mathrm{e}^{3x}\,dx, \qquad \int x^2\ln x\,dx, \qquad \int \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx.$$

3 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2y+t \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

4 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^3-\operatorname{sen}(ty)}{t^3y+1} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Soluzioni degli esercizi del 19 gennaio 2010

$\boxed{1}$ Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_{-1}^{2}(x^3-3x-2)\,dx=\Big[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}-2x\Big]_{-1}^{2}=\Big(4-6-4\Big)-\Big(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\Big)=-\frac{27}{4}.$$

Ponendo $f(x)=\cos x$ ed essendo $f'(x)=-\operatorname{sen}x$ si ottiene

$$\int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}\,dx=-\int(f(x))^{-3}f'(x)\,dx=-\frac{(f(x))^{-2}}{-2}+c=\frac{1}{2\cos^2 x}+c,$$

dunque $\frac{1}{2\cos^2 x}$ è una primitiva della funzione integranda e, sempre per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}\,dx=\Big[\frac{1}{2\cos^2 x}\Big]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2\cos^2(\pi/4)}-\frac{1}{2\cos^2 0}=\frac{1}{2}.$$

Alternativamente

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}x\,(\operatorname{tg}x)'\,dx=\Big[\frac{(\operatorname{tg}x)^2}{2}\Big]_0^{\pi/4}=\frac{\operatorname{tg}^2(\pi/4)}{2}=\frac{1}{2}.$$

$\boxed{2}$ Poiché $H(x)=\mathrm{e}^{3x}/3$ è una primitiva della funzione $h(x)=\mathrm{e}^{3x}$, mediante il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int(3x^2-4x+1)\mathrm{e}^{3x}\,dx&=(3x^2-4x+1)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}-\int(6x-4)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\,dx\\&=(3x^2-4x+1)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}-\Big((6x-4)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}-\int 6\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}\,dx\Big)\\&=(3x^2-4x+1)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}-(6x-4)\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}+\frac{2}{9}\mathrm{e}^{3x}+c=(x-1)^2\mathrm{e}^{3x}+c.\end{aligned}$$

Il secondo integrale

$$\int x^2\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c.$$

Poiché $H(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ è una primitiva della funzione $h(x)=\mathrm{e}^{-x}$, applicando due volte il metodo per parti al terzo integrale si ottiene

$$\begin{aligned}\int\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx&=-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)-\int(-\mathrm{e}^{-x})\cos(2x)\cdot 2\,dx\\&=-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)+2\int\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\,dx\\&=-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)+2\Big(-\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)-\int(-\mathrm{e}^{-x})(-\operatorname{sen}(2x))2\,dx\Big)\\&=-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)-2\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)-4\int\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx.\end{aligned}$$

L'integrale cercato $I:=\int\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$ è quindi soluzione dell'equazione

$$I=-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)-2\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)-4I\qquad\Longrightarrow\qquad I=-\frac{1}{5}\big(\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(2x)+2\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\big)+c.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Si ricorda che la soluzione generale dell'equazione lineare

$$y' = a(t)y + b(t)$$

con $a(t), b(t)$ funzioni continue, è

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.

Nel nostro caso $a(t) = -2$ e una sua primitiva è ad esempio $A(t) = -2t$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t} \int \mathrm{e}^{2t} t\, dt.$$

Applicando il metodo per parti si calcola

$$\int \mathrm{e}^{2t} t\, dt = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} t - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\, dt = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} + c,$$

con c generica costante d'integrazione, perciò

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t} \Big(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} + c \Big) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + c\, \mathrm{e}^{-2t}.$$

Imponendo ora la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ottiene l'equazione $1 = -\frac{1}{4} + c$ quindi $c = 5/4$ e la soluzione del problema di Cauchy assegnato è data da $y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{-2t}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Si osserva che la funzione nulla $y(t) \equiv 0$ per ogni t, è soluzione dell'equazione e verifica le condizioni iniziali, dunque è la soluzione cercata.