Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

12 gennaio 2010

$\boxed{1}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int (5 - 2x^5 - 4x^9)\,dx, \qquad \int \left(4^x + \frac{5}{\cos^2 x} - 5\,\mathrm{sen}\,x\right)dx, \qquad \int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{3x-1}{x^2+1}\,dx.$$

$\boxed{2}$ Dato l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2t + 3\cos t}{y^6}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 3t + 1$ è soluzione dell'equazione in $]0, +\infty[$;

b) determinare la generica soluzione del problema, ad esempio col metodo di separazione delle variabili;

c) tra tutte le soluzioni determinare quella per cui $y(0) = 1$.

$\boxed{3}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3t^2 y - t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \frac{1}{3}$ è soluzione del problema;

b) determinare la soluzione del problema, qualora non lo sia la funzione di cui al punto a).

Soluzioni degli esercizi del 12 gennaio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ Per la proprietà di linearità e consultando la prima tabella si ottiene

$$\int (5 - 2x^5 - 4x^9)\, dx = \int 5\, dx - 2 \int x^5\, dx - 4 \int x^9\, dx = 5x - 2\frac{x^6}{6} - 4\frac{x^{10}}{10} + c,$$

$$\begin{aligned}\int \left(4^x + \frac{5}{\cos^2 x} - 5 \operatorname{sen} x\right) dx &= \int 4^x\, dx + 5 \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - 5 \int \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 5 \operatorname{tg} x + 5 \cos x + c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx &= \int \left(1 + 2\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx = \int 1\, dx + 2 \int x^{-1/2}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx \\ &= x + 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + \ln|x| + c = x + 4\sqrt{x} + \ln|x| + c.\end{aligned}$$

Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2}(1-x^2)'\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + c = -\sqrt{1-x^2} + c,\end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}\, dx = \int (\ln x)^3 (\ln x)'\, dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + c,$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+1}\, dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + c.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ a) Si ha $y'(t) = 3$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3 = \frac{2t + 3\cos t}{(3t+1)^6}$$

che non è identicamente vera per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $3 \neq \frac{2+3\cos 1}{4^6} < 1$). La funzione non è dunque soluzione.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^6\, dy = (2t + 3\cos t)\, dt$$

e integrando

$$\int y^6\, dy = \int (2t + 3\cos t)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^7}{7} = t^2 + 3 \operatorname{sen} t + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo quest'ultima equazione nell'incognita y si ottiene

$$y = y(t) = \sqrt[7]{7t^2 + 21 \operatorname{sen} t + 7c}$$

che al variare di $c \in \mathbb{R}$ fornisce tutte le soluzioni dell'equazione.

c) Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $1 = \sqrt[7]{7c}$ cioè $c = 1/7$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[7]{7t^2 + 21 \operatorname{sen} t + 1}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ a) Si ha $y'(t) = 0$ e sostituendo si ottiene

$$0 = 3t^2 \frac{1}{3} - t^2$$

che è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$. La funzione è dunque soluzione della prima equazione. Tuttavia $y(0) \neq 2$ perciò non verifica le condizioni iniziali, quindi non è soluzione del problema di Cauchy.

b) Si ricorda che la soluzione generale dell'equazione lineare

$$y' = a(t)y + b(t)$$

con $a(t), b(t)$ funzioni continue, è

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.

Nel nostro caso $a(t) = 3t^2$ e una sua primitiva è ad esempio $A(t) = t^3$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = \mathrm{e}^{t^3} \int \mathrm{e}^{-t^3}(-t^2)\, dt = \frac{\mathrm{e}^{t^3}}{3} \int \mathrm{e}^{-t^3}(-3t^2)\, dt.$$

Consultando la tabella 2 degli integrali si vede che

$$\int \mathrm{e}^{f(t)} f'(t)\, dt = \mathrm{e}^{f(t)} + c$$

con c generica costante d'integrazione, perciò

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^3}}{3}\left(\mathrm{e}^{-t^3} + c\right) = \frac{1}{3} + \bar{c}\,\mathrm{e}^{t^3}$$

essendo $\bar{c} = -c/2$ un generico numero reale al pari di c.

c) Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si ottiene l'equazione $2 = 1/3 + \bar{c}$ quindi $\bar{c} = 5/3$ e la soluzione è $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\mathrm{e}^{t^3}$.