Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

22 dicembre 2009

1 Data la funzione

$$g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-3x}$$

a) determinare il dominio;
b) studiare il segno di g;
c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
e) studiare gli eventuali asintoti di g;
f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;
g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

2 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

3 Per l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2t+1}{y^2}$$

verificare se le seguenti funzioni sono soluzioni in $\mathbb{R}^+$:

a) $y_1(t) = t^2 + 3$, **b)** $y_2(t) = \sqrt[3]{3t^2+3t+1}$,

4 Verificare che la funzione $y(t) = (t-1)\mathrm{e}^t$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' - 5y + (8t-6)\mathrm{e}^t = 0.$$

Di quale tipo di equazione si tratta?

Soluzioni degli esercizi del 22 dicembre 2009

$\boxed{1}$ a) Il dominio è dato banalmente da $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione è ivi continua e derivabile in quanto composizione e prodotto di funzioni continue e derivabili.

b) Poiché e^{-3x} è strettamente positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione è positiva se $x > -1/2$, negativa se $x < -1/2$ e si annulla in $x = -1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x+1)\mathrm{e}^{-3x} = \big[-\infty \cdot +\infty\big] = -\infty,$$

mentre, ricordando ad esempio il limite fondamentale

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{z^n}{a^z} = 0, \quad \text{per ogni } a > 1,\ n \geq 1,$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\mathrm{e}^{3x}} = 0.$$

Il medesimo risultato si poteva ottenere anche mediante il teorema di de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\mathrm{e}^{3x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3\mathrm{e}^{3x}} = \left[\frac{2}{+\infty}\right] = 0.$$

Dallo studio dei limiti si ricava in particolare che la funzione non ammette minimo.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{-3x} + (2x+1)\mathrm{e}^{-3x}(-3) = -(6x+1)\mathrm{e}^{-3x}.$$

La derivata prima è dunque ≥ 0 se e solo se $6x + 1 \leq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/6$. Quindi

$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/6[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/6, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente in $]-\infty, -1/6[$, decrescente in $]-1/6, +\infty[$. Il punto $x = -1/6$ è di massimo relativo.

e) Essendo $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ allora la retta $y = 0$ è asintoto (orizzontale) a $+\infty$. Poiché invece

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \Big(2 + \frac{1}{x}\Big)\mathrm{e}^{-3x} = [2 \cdot +\infty] = +\infty,$$

la funzione non ammette asintoti a $-\infty$.

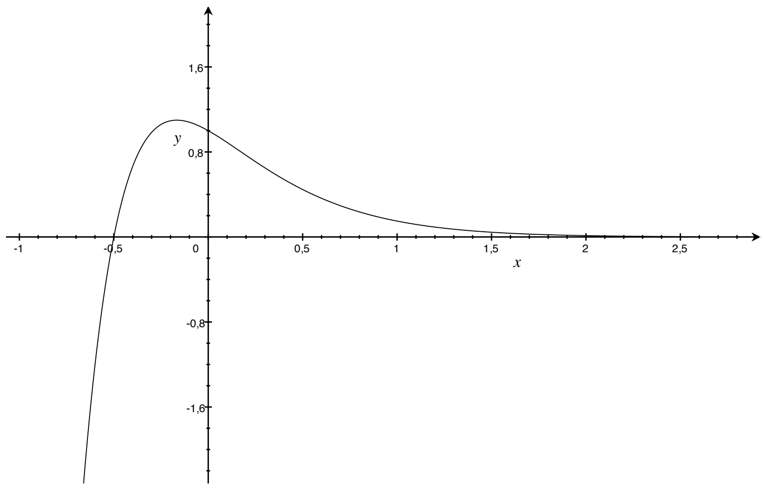
f) La derivata seconda è

$$g''(x) = -6\mathrm{e}^{-3x} - (6x+1)\mathrm{e}^{-3x}(-3) = (18x-3)\mathrm{e}^{-3x}.$$

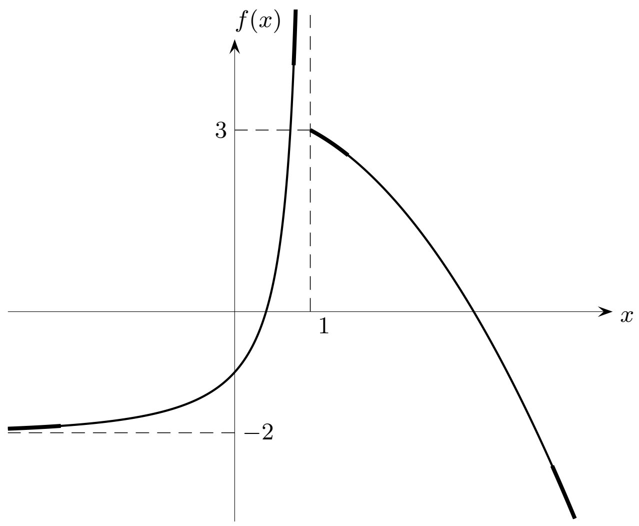
Si ha che $g''(x) \geq 0$ se e solo se $18x - 3 \geq 0$ ovvero se $x \geq 1/6$, quindi

$$g''(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1/6, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1/6[. \end{cases}$$

La funzione è dunque convessa in $]1/6, +\infty[$ mentre è concava in $]-\infty, 1/6[$.



2 in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



3 a) La funzione $y_1(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}^+$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_1'(t) = \frac{2t+1}{y_1^2(t)}$ per ogni $t > 0$. Essendo

$$y_1'(t) = 2t,$$

$$\frac{2t+1}{y_1^2(t)} = \frac{2t+1}{(t^2+3)^2}.$$

si osserva che, ad esempio per $t = 0$,

$$0 = y_1'(0) \neq \frac{2 \cdot 0 + 1}{y_1^2(0)} = \frac{1}{9},$$

quindi y_1 non è soluzione dell'equazione.

b) La funzione $y_2(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}^+$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_2'(t) = \frac{2t+1}{y_2^2(t)}$ per ogni $t > 0$. Si ha

$$y_2'(t) = \left((3t^2+3t+1)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(3t^2+3t+1)^{-2/3}(6t+3) = \frac{2t+1}{(\sqrt[3]{3t^2+3t+1})^2},$$

$$\frac{2t+1}{y_2^2(t)} = \frac{2t+1}{(\sqrt[3]{3t^2+3t+1})^2}.$$

In conclusione si ha che $y_2'(t) = \frac{2t+1}{y_2^2(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, dunque y_2 è soluzione.

$\boxed{\mathbf{4}}$ a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 2. Derivando si ottiene

$$y'(t) = \mathrm{e}^t + (t-1)\mathrm{e}^t = t\mathrm{e}^t, \qquad y''(t) = \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t = (t+1)\mathrm{e}^t,$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 4y'(t) - 5y(t) + (8t-6)\mathrm{e}^t = (t+1)\mathrm{e}^t - 4t\mathrm{e}^t - 5(t-1)\mathrm{e}^t + (8t-6)\mathrm{e}^t = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque y è soluzione.