Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

15 dicembre 2009

1 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{3x^2 - 5x + 1}, \qquad f_2(x) = (1 + x \operatorname{sen} x)^3 + \frac{\sqrt{x} - e^x}{\log_3 x}, \qquad f_3(x) = \operatorname{arctg}(x^2 \cos x).$$

2 Risolvere i seguenti limiti, dopo aver verificato che valgono le ipotesi del Teorema di de l'Hôpital

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{sen} x + 3x^2}{x \cos x + 3^x - (1+2x)^2} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x) + 3x^2 - \operatorname{sen}(3x + x^2)}{e^x \operatorname{sen} x - x \cos x - 5x^2}.$$

3 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2}$$

a) determinare il dominio;
b) studiare il segno di g;
c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$,
f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;
g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

Soluzioni degli esercizi del 15 dicembre 2009

$\boxed{1}$ Utilizzando la regola di derivazione del quoziente:

$$f_1'(x) = \frac{(4x+1)(3x^2-5x+1)-(2x^2+x-2)(6x-5)}{(3x^2-5x+1)^2} = \frac{-13x^2+16x-9}{(3x^2-5x+1)^2}.$$

Utilizzando la regola di derivazione del prodotto del quoziente e della funzione composta si ottiene:

$$f_2'(x) = 3(1+x\operatorname{sen}x)^2(\operatorname{sen}x + x\cos x) + \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \mathrm{e}^x)\log_3 x - (\sqrt{x}-\mathrm{e}^x)\frac{\log_3 \mathrm{e}}{x}}{(\log_3 x)^2}.$$

Utilizzando la regola di derivazione del prodotto e della funzione composta si ottiene infine:

$$f_3'(x) = \frac{1}{1+\left(x^2\cos x\right)^2}(2x\cos x - x^2\operatorname{sen}x).$$

$\boxed{2}$ a) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione $[0/0]$. Applicando de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}x - 5\operatorname{sen}x + 3x^2}{x\cos x + 3^x - (1+2x)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos^2 x} - 5\cos x + 6x}{\cos x - x\operatorname{sen}x + 3^x\ln 3 - 4(1+2x)} = \frac{3}{3-\ln 3}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato vale allora $\frac{3}{3-\ln 3}$.

b) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione $[0/0]$. Applicando de l'Hôpital due volte consecutivamente si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+3x^2-\operatorname{sen}(3x+x^2)}{\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x - x\cos x - 5x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}+6x-\cos(3x+x^2)(3+2x)}{\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x + \mathrm{e}^x\cos x - \cos x + x\operatorname{sen}x - 10x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{(1+3x)^2}+6+\operatorname{sen}(3x+x^2)(3+2x)^2 - 2\cos(3x+x^2)}{2\mathrm{e}^x\cos x + 2\operatorname{sen}x + x\cos x - 10} = \frac{-9+6+0-2}{2+0+0-10} = \frac{5}{8}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato è $\frac{5}{8}$.

$\boxed{3}$ a) Il dominio è dato dagli $x\in\mathbb{R}$ per cui $x-2\neq 0$, ovvero $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $2x^2-1\geq 0$ cioè se e solo se $x\leq -1/\sqrt{2}$ oppure $x\geq 1/\sqrt{2}$. Il denominatore è positivo se $x>2$. Allora

$$g(x) = \begin{cases} <0, & \text{se } x\in\,]-\infty,-1/\sqrt{2}[\,\cup\,]1/\sqrt{2},2[,\\ =0, & \text{se } x=-1/\sqrt{2} \text{ oppure } x=1/\sqrt{2},\\ >0, & \text{se } x\in\,]-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}[\,\cup\,]2,+\infty[. \end{cases}$$

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 2 e a $\pm\infty$. Utilizzando anche il punto b) si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x\,\frac{2-1/x^2}{1-2/x}\right) = [\pm\infty\cdot 2] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 2^\pm} g(x) = \left[\frac{7}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{4x(x-2)-(2x^2-1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+1}{(x-2)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è positiva se e solo se $2x^2 - 8x + 1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq 2 - \frac{\sqrt{14}}{2}$ oppure $x \geq 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}$. Più precisamente

$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 2 - \frac{\sqrt{14}}{2}[\cup]2 + \frac{\sqrt{14}}{2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 2 - \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ oppure } x = 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]2 - \frac{\sqrt{14}}{2}, 2[\cup]2, 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente in $]-\infty, 2 - \frac{\sqrt{14}}{2}[$ e in $]2 + \frac{\sqrt{14}}{2}, +\infty[$, decrescente in $]2 - \frac{\sqrt{14}}{2}, 2[$ e in $]2, 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}[$. I punti $x = 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}$ e $x = 2 - \frac{\sqrt{14}}{2}$ sono rispettivamente punti di minimo e massimo relativo.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = -1/3$ e $g'(-1) = 11/9$, l'equazione della retta cercata è

$$y = (x+1)\frac{11}{9} - \frac{1}{3} \qquad \text{cioè} \qquad y = \frac{11}{9}x + \frac{8}{9}.$$

f) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{(4x-8)(x-2)^2 - (2x^2 - 8x + 1)2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4} = \frac{(4x-8)(x-2) - 2(2x^2 - 8x + 1)}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{14}{(x-2)^3}.$$

Si ha che $g''(x) > 0$ se e solo se $(x-2)^3 > 0$ ovvero se $x > 2$, quindi

$$g''(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]2, +\infty[, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 2[. \end{cases}$$

La funzione è dunque convessa in $]2, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, 2[$.