Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

24 novembre 2009

$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-7x^7+3}{2x^7+3-2x^5},\qquad \textbf{b)}\ \lim_{y\to+\infty}\frac{5y^5+y^3-2}{1+y+3y^9},\qquad \textbf{c)}\ \lim_{t\to-\infty}\frac{2t^5-5t-10}{3t^2+t^3+2}.$$

Sapendo inoltre che $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ per ogni $\alpha > 0$ si calcolino, qualora possibile, i seguenti limiti

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5/3}-3x^\pi+3}{2x^{9/5}+5x^2-2},\qquad \textbf{e)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{5/3}-3x^\pi+3}{2x^{9/5}+5x^2-2}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

$$\textbf{f)}\ \lim_{z\to-1}\frac{3z^2-z-1}{z^2-2z-3},\qquad \textbf{g)}\ \lim_{x\to0}\frac{\cos(\pi-5x)}{x\ln(1-x^2+2x)}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sapendo che

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1\\ 0 & \text{se } 0<a<1,\end{cases}$$

calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-5^x+4}{\mathrm{e}^x+3^x-2}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Risolvere la seguente disequazione

$$\log_2(1-x)\le 5-\frac{3}{\log_4(1-x)}.$$

Soluzioni degli esercizi del 24 novembre 2009

$\boxed{1}$ a) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-7x^7+3}{2x^7+3-2x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5/x^4-7+3/x^7}{2+3/x^7-2/x^3}=\left[\frac{0-7+0}{2+0-0}\right]=-\frac{7}{2}.$$

b) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{5y^5+y^3-2}{1+y+3y^9}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^5(5+1/y^2-2/y^5)}{y^9(1/y^9+1/y^8+3)}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^4}\cdot\frac{5+1/y^2-2/y^5}{1/y^9+1/y^8+3}\right)$$
$$=\left[0\cdot\frac{5+0-0}{0+0+3}\right]=0.$$

c) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{2t^5-5t-10}{3t^2+t^3+2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t^5(2-5/t^4-10/t^5)}{t^3(3/t+1+2/t^3)}=\lim_{t\to-\infty}\left(t^2\cdot\frac{2-5/t^4-10/t^5}{3/t+1+2/t^3}\right)$$
$$=\left[+\infty\cdot\frac{2-0-0}{0+1+0}\right]=+\infty.$$

d) Si procede analogamente al caso delle funzioni razionali. Poiché $\pi-5/3>0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5/3}-3x^\pi+3}{2x^{9/5}+5x^2-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\pi(2/x^{\pi-5/3}-3+3/x^\pi)}{x^2(1/x^{1/5}+5-2/x^2)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\pi-2}\cdot\frac{2/x^{\pi-5/3}-3+3/x^\pi}{1/x^{1/5}+5-2/x^2}\right)=\left[+\infty\cdot\frac{0-3+0}{0+5+0}\right]=-\infty.$$

e) Poiché le potenze reali ad esponente reale sono definite solamente quando la base è maggiore di zero, il dominio della funzione in considerazione non è inferiormente illimitato perciò non ha senso calcolare il limite richiesto.

$\boxed{2}$ f) Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{3}{0}]$. Studiamo quindi il segno della funzione in un intorno di $z_0=-1$. Il numeratore tende a 3 e quindi è positivo per gli z vicini a -1. Poiché z^2-2z-3 è positivo per gli $z<-1$ e per gli $z>3$ si ottiene che la funzione è positiva per gli $z<-1$ e negativa per gli $z>-1$ e vicini a -1, quindi

$$\lim_{z\to-1^-}\frac{3z^2-z-1}{z^2-2z-3}=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty,\qquad \lim_{z\to-1^+}\frac{3z^2-z-1}{z^2-2z-3}=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty,$$

quindi il limite cercato non esiste.

g) Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{-1}{0}]$. Studiamo il segno della funzione in un intorno di $x_0=0$. Il numeratore tende a -1, quindi è negativo per gli x vicini a 0. Studiamo il segno del denominatore: si ha $\ln(1-x^2+2x)>0$ se e solo se $1-x^2+2x>1$ cioè $x^2-2x<0$ ovvero $0<x<2$. Si ha dunque che $x\ln(1-x^2+2x)$ è sempre positivo nelle vicinanze di $x_0=0$, perciò

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\pi-5x)}{x\ln(1-x^2+2x)}=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=-\infty.$$

3 Portando 5^x e 3^x a fattore comune, rispettivamente, a numeratore e denominatore, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-5^x+4}{\mathrm{e}^x+3^x-2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x((2/5)^x-1+4/5^x)}{3^x((\mathrm{e}/3)^x+1-2/3^x)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left((5/3)^x\cdot\frac{(2/5)^x-1+4/5^x}{(\mathrm{e}/3)^x+1-2/3^x}\right)=\left[+\infty\cdot\frac{0-1+0}{0+1-0}\right]=-\infty.\end{aligned}$$

4 Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $1-x>0$ e $\log_4(1-x)\neq 0$ cioè $x<1$ e $1-x\neq 1$. In definitiva si deve avere $x<1$ e $x\neq 0$. Utilizzando la formula del cambiamento di base dei logaritmi e osservando che $\log_2 4=2$, si ottiene che la disuguaglianza data è equivalente a

$$\log_2(1-x)\le 5-\frac{3}{\frac{\log_2(1-x)}{\log_2 4}} \iff \log_2(1-x)\le 5-\frac{6}{\log_2(1-x)} \iff$$

$$\iff \frac{\big(\log_2(1-x)\big)^2-5\log_2(1-x)+6}{\log_2(1-x)}\le 0.$$

Operando la sostituzione $z=\log_2(1-x)$ si ottiene la disequazione fratta

$$\frac{z^2-5z+6}{z}\le 0. \tag{1}$$

Il numeratore è positivo per $z\le 2$ oppure $z\ge 3$, mentre il denominatore è positivo se $z>0$, quindi (1) è verificata se $z<0$ oppure $2\le z\le 3$. Tornando alla variabile x otteniamo

$$\log_2(1-x)<0 \quad \text{oppure} \quad 2\le\log_2(1-x)\le 3$$

ovvero

$$1-x<1 \quad \text{oppure} \quad 4\le 1-x\le 8$$

cioè

$$x>0 \quad \text{oppure} \quad -7\le x\le -3.$$

Ricordandoci anche delle condizioni di esistenza si ottiene che l'insieme delle soluzioni è

$$S=[-7,-3]\cup]0,1[$$