Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

3 novembre 2009

$\boxed{\mathbf{1}}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{1}{x+1}+1<\frac{2}{x-2}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\log_{1/3}\left(2-|x+1|\right)\geq\log_{1/3}(x+2)-1$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{8}{4^x}>2^{\sqrt{6x-x^2}}$$

Soluzioni degli esercizi del 3 novembre 2009

1 Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $x+1 \neq 0$ e $x-2 \neq 0$ cioè $x \neq -1, \neq 2$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\frac{1}{x+1}+1<\frac{2}{x-2} \iff \frac{1}{x+1}+1-\frac{2}{x-2}<0 \iff$$

$$\iff \frac{(x-2)+(x+1)(x-2)-2(x+1)}{(x+1)(x-2)}<0 \iff \frac{x^2-2x-6}{(x+1)(x-2)}<0.$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore. Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x^2-2x-6 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq 1-\sqrt{7}$ oppure $x \geq 1+\sqrt{7}$. In definitiva il numeratore è positivo se $x<1-\sqrt{7}$ oppure $x>1+\sqrt{7}$, negativo se $1-\sqrt{7}<x<1+\sqrt{7}$ e si annulla se $x=1-\sqrt{7}$ oppure $x=1+\sqrt{7}$.

Analogamente si verifica che il denominatore è positivo se $x<-1$ oppure $x>2$, negativo se $-1<x<2$.

La disequazione ha soluzione quando numeratore e denominatore hanno segno discorde, dunque se $1-\sqrt{7}<x<-1$ oppure $2<x<1+\sqrt{7}$. L'insieme delle soluzioni è quindi

$$S =]1-\sqrt{7},-1[\cup]2,1+\sqrt{7}[$$

2 Innanzitutto affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere

$$\begin{cases} 2-|x+1|>0 \\ x+2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2>|1+x| \\ x>-2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2>1+x>-2 \\ x>-2 \end{cases}$$

quindi $-2<x<1$. Osservato che $-1=\log_{1/3}3$, utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene che la disequazione è equivalente a

$$\log_{1/3}\big(2-|x+1|\big) \geq \log_{1/3}(x+2)+\log_{1/3}3 \iff \log_{1/3}\big(2-|x+1|\big) \geq \log_{1/3}(3x+6)$$

Poiché la funzione logaritmica in base $1/3$ è decrescente, quest'ultima equivale a

$$2-|x+1| \leq 3x+6$$

Distinguiamo due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo oppure negativo. Perciò la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-(x+1) \leq 3x+6, \end{cases} \cup \begin{cases} x+1<0 \\ 2+(x+1) \leq 3x+6. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni gli $x \geq -1$, il secondo $-3/2 \leq x < -1$. Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S=[-3/2,1[$$

3 Innanzitutto affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, ovvero $6x-x^2 \geq 0$ cioè $0 \leq x \leq 6$. Poiché $8=2^3$ e $4^x=2^{2x}$, per le proprietà della funzione esponenziale la disequazione può essere scritta nella forma

$$2^{3-2x} > 2^{\sqrt{6x-x^2}}$$

e utilizzando la proprietà di crescenza della funzione esponenziale di base 2 si ottiene equivalentemente

$$3 - 2x > \sqrt{6x - x^2}.$$

Affinché questa disequazione possa avere soluzioni, deve essere $3 - 2x > 0$. A questo punto si può elevare al quadrato ambo i membri, perciò la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ (3 - 2x)^2 > 6x - x^2 \\ 0 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

La disequazione di secondo grado ha come soluzioni $x < 3/5$ oppure $x > 3$, quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione data è

$$S = [0, 3/5[$$