Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 17/09/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -2$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è crescente in $]a,b[$
- B f è convessa in $]a,b[$
- C f è decrescente in $]a,b[$
- D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y' = \operatorname{sen}(3t+5y)$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1-\pi x}{e^2 x + 5}$ rappresenta

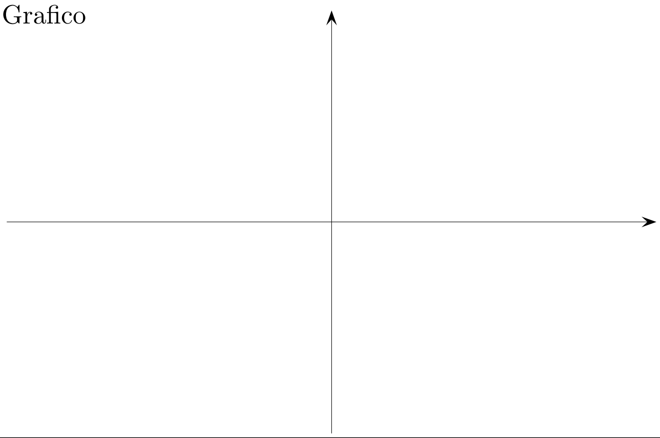
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[4]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{6}$ Per definizione, una primitiva di una funzione f in $]a,b[$ è:

$\boxed{7}$ Descrivere con precisione le relazioni tra la derivata e le proprietà di monotonia di una funzione f

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2}{2+x^4}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; f) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y(t^2+1)}{t\ln^2 y} \\ y(1) = \mathrm{e} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{3t-2}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

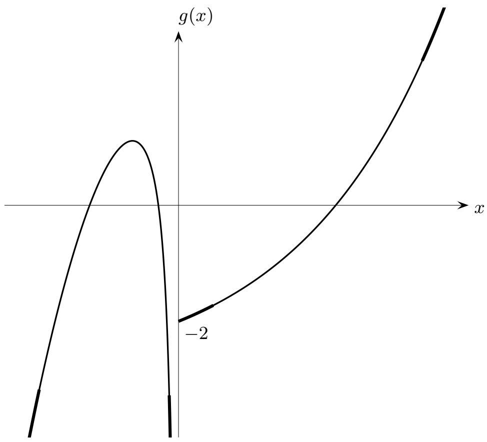
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{5 + 3x^4\cos^2 x}{\cos^2 x} + 5^x \right) dx, \qquad \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 17 settembre 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ C; $\boxed{\mathbf{3}}$ C; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) Poiché il denominatore è sempre strettamente positivo, la funzione è sempre definita dunque $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Essendo razionale è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g è funzione pari quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, dunque basterebbe studiarlo per $x \geq 0$.

b) Il denominatore è sempre positivo, il numeratore è positivo tranne che in $x = 0$, dunque la funzione è sempre positiva e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2/x^2 + x^2} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0.$$

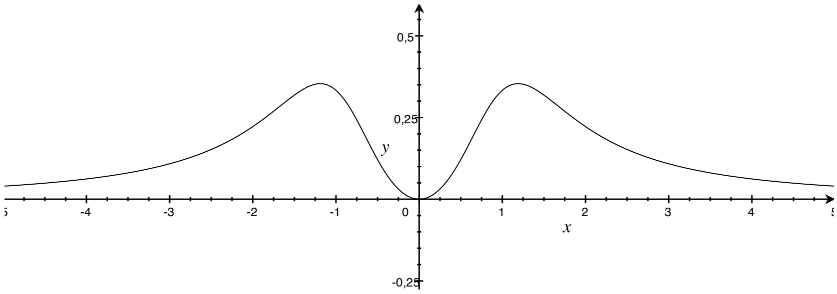
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x(x^4+2) - x^2 4x^3}{(x^4+2)^2} = \frac{4x - 2x^5}{(x^4+2)^2} = \frac{2x(2-x^4)}{(x^4+2)^2}.$$

Poiché $2 - x^4 \geq 0$ se e solo se $-\sqrt[4]{2} \leq x \leq \sqrt[4]{2}$, il numeratore è positivo per $x < -\sqrt[4]{2}$ oppure $0 \leq x \leq \sqrt[4]{2}$, mentre il denominatore è sempre positivo. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt[4]{2}[\cup]0, \sqrt[4]{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt[4]{2} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt[4]{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\sqrt[4]{2}, 0[\cup]\sqrt[4]{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, -\sqrt[4]{2}[$ e in $]0, \sqrt[4]{2}[$, mentre è decrescente in $]-\sqrt[4]{2}, 0[$ e in $]\sqrt[4]{2}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un minimo assoluto mentre in $x = -\sqrt[4]{2}$ e $x = \sqrt[4]{2}$ ammette due massimi assoluti.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = \frac{1}{3}$ e $g'(1) = \frac{2}{9}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{2}{9}(x-1) + \frac{1}{3}.$$

f) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(4-10x^4)(x^4+2)^2 - (4x-2x^5)2(x^4+2)4x^3}{(x^4+2)^4} \\ &= \frac{(4-10x^4)(x^4+2) - (4x-2x^5)8x^3}{(x^4+2)^4} = \frac{2(3x^8-24x^4+4)}{(x^4+2)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $3x^8 - 24x^4 + 4 \geq 0$. Quest'ultima è riconducibile ad una disequazione di secondo grado: posto $z = x^4$ si ottiene $3z^2 - 24z + 4 \geq 0$, le cui soluzioni sono date da $z \leq \frac{12-2\sqrt{33}}{3}$ oppure $z \geq \frac{12+2\sqrt{33}}{3}$. Nella variabile x si ottiene dunque $x^4 \leq \frac{12-2\sqrt{33}}{3}$ oppure $x^4 \geq \frac{12+2\sqrt{33}}{3}$ che è verificata se e solo se $-\sqrt[4]{\frac{12-2\sqrt{33}}{3}} \leq x \leq \sqrt[4]{\frac{12-2\sqrt{33}}{3}}$ oppure $x \leq -\sqrt[4]{\frac{12+2\sqrt{33}}{3}}$ oppure $x \geq \sqrt[4]{\frac{12+2\sqrt{33}}{3}}$. Posto $x_1 = \sqrt[4]{\frac{12-2\sqrt{33}}{3}}$ e $x_2 = \sqrt[4]{\frac{12+2\sqrt{33}}{3}}$ si ottiene che la funzione è concava in $]-x_2, -x_1[$ e in $]x_1, x_2[$, mentre è convessa in $]-\infty, -x_2[$, in $]-x_1, x_1[$ e in $]x_2, +\infty[$. In $x = -x_1$, $x = -x_2$, $x = x_1$ e $x = x_2$ ammette dei punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 3\mathrm{e}^{3t-2}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3\mathrm{e}^{3t-2} = \frac{\mathrm{e}^{3t-2}(t^2+1)}{t\ln^2 \mathrm{e}^{3t-2}} = \frac{\mathrm{e}^{3t-2}(t^2+1)}{t(3t-2)^2}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $3\mathrm{e} \neq 2\mathrm{e}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1) = \mathrm{e}$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \frac{t^2+1}{t}\,dt = \Big(t + \frac{1}{t}\Big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \int \Big(t+\frac{1}{t}\Big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{3}\ln^3 y = \frac{t^2}{2} + \ln t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo nell'incognita y si ottiene

$$\frac{1}{3}\ln^3 y = \frac{t^2}{2} + \ln t + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \exp\sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3\ln t + 3c}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = \mathrm{e}$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + c$, da cui si ricava $c = -\frac{1}{6}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3\ln t - \frac{1}{2}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\ln^2 z}{z}\,dz = \int_1^t \Big(s+\frac{1}{s}\Big)\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{3}\ln^3 z\Big]_{\mathrm{e}}^{y} = \Big[\frac{s^2}{2} + \ln s\Big]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\ln^3 y - \frac{1}{3} = \frac{t^2}{2} + \ln t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \Big(\frac{5+3x^4\cos^2 x}{\cos^2 x} + 5^x\Big)\,dx &= 5\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + 3\int x^4\,dx + \int 5^x\,dx \\ &= 5\,\mathrm{tg}\,x - \frac{3}{5}x^5 + \frac{5^x}{\ln 5} + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (2x^2+1)^{-1/2}(2x^2+1)'\,dx = \frac{1}{4}\Big[\frac{(2x^2+1)^{1/2}}{1/2}\Big]_0^2 = 1.$$