Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 17/09/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) > 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = \dfrac{t}{y} + 3y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$ rappresenta

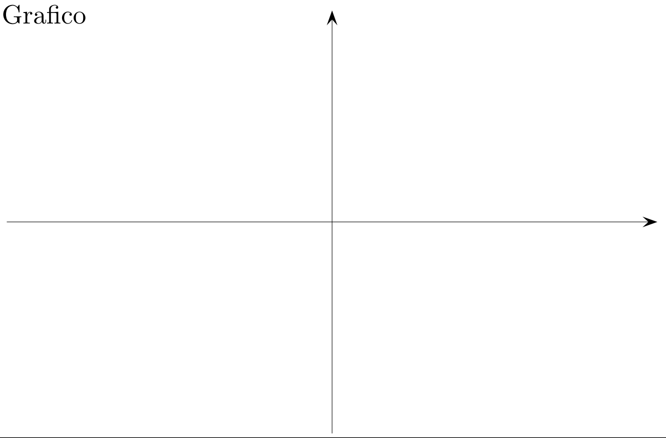
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{6}$ Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 è:

$\boxed{7}$ Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{-2x^2}{x^4+1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$; f) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y(t^2+2)}{t \ln y} \\ y(1) = \mathrm{e} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2t-1}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

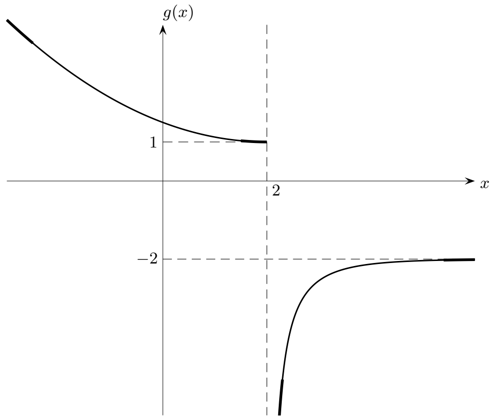
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3 - 2x^5 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + 3^x \right) dx, \qquad \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 17 settembre 2010

1 C; **2** D; **3** D; **4** D; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) Poiché il denominatore è sempre strettamente positivo, la funzione è sempre definita dunque $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Essendo razionale è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g è funzione pari quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, dunque basterebbe studiarlo per $x \geq 0$.

b) Il denominatore è sempre positivo, il numeratore è negativo tranne che in $x = 0$, dunque la funzione è sempre negativa e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{x^2 + 1/x^2} = \left[\frac{-2}{+\infty}\right] = 0.$$

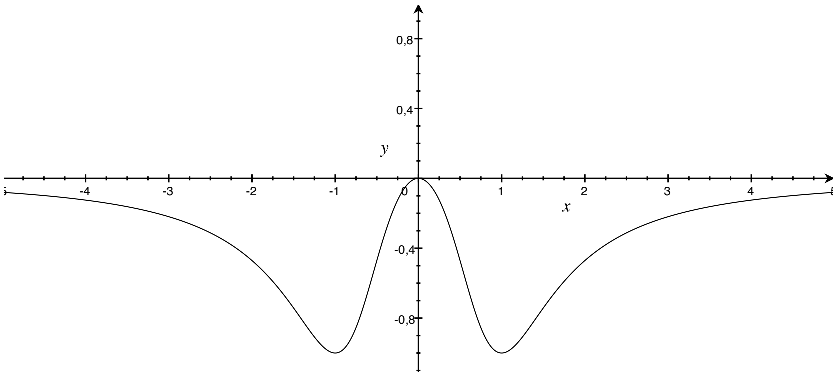
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-4x(x^4+1) + 2x^2 4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{4x^5 - 4x}{(x^4+1)^2} = \frac{4x(x^4-1)}{(x^4+1)^2}.$$

Poiché $x^4 - 1 \geq 0$ se e solo se $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$, il numeratore è positivo per $-1 < x < 0$ oppure $x > 1$, mentre il denominatore è sempre positivo. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[, \\ = 0, & \text{se } x = -1 \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = 1, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -1[$ e in $]0, 1[$, mentre è crescente in $]-1, 0[$ e in $]1, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un massimo assoluto mentre in $x = -1$ e $x = 1$ ammette due minimi assoluti.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = -\frac{8}{17}$ e $g'(2) = \frac{120}{289}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{120}{289}(x-2) - \frac{8}{17}.$$

f) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= 4\frac{(5x^4-1)(x^4+1)^2 - (x^5-x)2(x^4+1)4x^3}{(x^4+1)^4} \\ &= 4\frac{(5x^4-1)(x^4+1) - (x^5-x)8x^3}{(x^4+1)^3} = \frac{4(-3x^8+12x^4-1)}{(x^4+1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $-3x^8+12x^4-1 \geq 0$ ovvero $3x^8 - 12x^4 + 1 \leq 0$. Quest'ultima è riconducibile ad una disequazione di secondo grado: posto $z = x^4$ si ottiene $3z^2 - 12z + 1 \leq 0$, le cui soluzioni sono date da $\frac{6-\sqrt{33}}{3} \leq z \leq \frac{6+\sqrt{33}}{3}$. Nella variabile x si ottiene dunque $\frac{6-\sqrt{33}}{3} \leq x^4 \leq \frac{6+\sqrt{33}}{3}$ che è verificata se e solo se $\sqrt[4]{\frac{6-\sqrt{33}}{3}} \leq x \leq \sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{33}}{3}}$ oppure $-\sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{33}}{3}} \leq x \leq -\sqrt[4]{\frac{6-\sqrt{33}}{3}}$. Posto $x_1 = \sqrt[4]{\frac{6-\sqrt{33}}{3}}$ e $x_2 = \sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{33}}{3}}$ si ottiene che la funzione è convessa in $]-x_2, -x_1[$ e in $]x_1, x_2[$, mentre è concava in $]-\infty, -x_2[$, in $]-x_1, x_1[$ e in $]x_2, +\infty[$. In $x = -x_1$, $x = -x_2$, $x = x_1$ e $x = x_2$ ammette dei punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 2e^{2t-1}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2e^{2t-1} = \frac{e^{2t-1}(t^2+2)}{t \ln e^{2t-1}} = \frac{e^{2t-1}(t^2+2)}{t(2t-1)}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $2e \neq 3e$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1) = e$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln y}{y}\,dy = \frac{t^2+2}{t}\,dt = \Big(t + \frac{2}{t}\Big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{\ln y}{y}\,dy = \int \Big(t + \frac{2}{t}\Big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln^2 y = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo nell'incognita y si ottiene

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \exp\sqrt{t^2 + 4\ln t + 2c}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = e$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c$, da cui si ricava $c = 0$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\sqrt{t^2 + 4\ln t}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_e^y \frac{\ln z}{z}\,dz = \int_1^t \Big(s + \frac{2}{s}\Big)\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{2}\ln^2 z\Big]_e^y = \Big[\frac{s^2}{2} + 2\ln s\Big]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln^2 y - \frac{1}{2} = \frac{t^2}{2} + 2\ln t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \Big(\frac{3 - 2x^5 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + 3^x\Big)\,dx &= 3\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx - 2\int x^5\,dx + \int 3^x\,dx \\ &= -3\cot x - \frac{x^6}{3} + \frac{3^x}{\ln 3} + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{6x}{\sqrt{3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^2 (3x^2+4)^{-1/2}(3x^2+4)'\,dx = \frac{1}{6}\Big[\frac{(3x^2+4)^{1/2}}{1/2}\Big]_0^2 = \frac{2}{3}.$$