Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 01/09/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è decrescente in $]a,b[$
- B f è crescente in $]a,b[$
- C f è convessa in $]a,b[$
- D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = 2^t y + y' \cos t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = -\dfrac{3}{5x}$ rappresenta

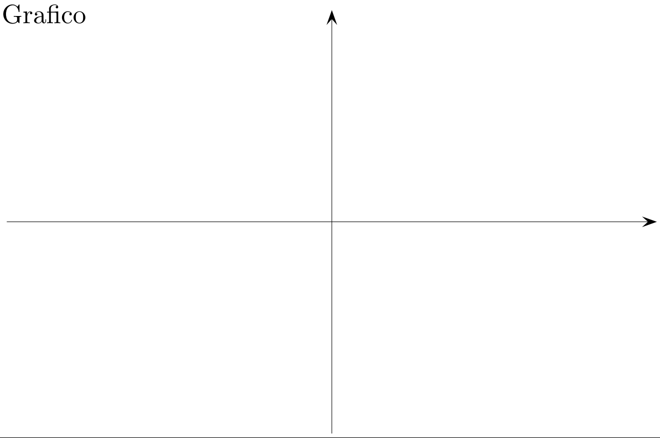
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = 3 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{2x+1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y + 2t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \sqrt{t^4+1}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

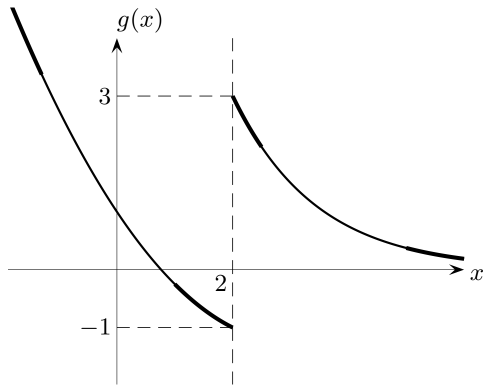
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x^2-1}{x^3} \Big)\, dx, \qquad \int_0^1 (2x^2 - x)\mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 1 settembre 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ B; $\boxed{\mathbf{3}}$ B; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $2x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è sempre positivo dunque la funzione è positiva per $x > -1/2$, negativa per $x < -1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(-1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{\mathrm{e}^{3/2}}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo, mentre, utilizzando il limite fondamentale $\lim_{z\to+\infty} \mathrm{e}^z/z = +\infty$ (oppure, alternativamente, il teorema di de L'Hôpital) si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3x}/(-3x)}{-2/3 - 1/(3x)} = \left[\frac{+\infty}{-2/3}\right] = -\infty.$$

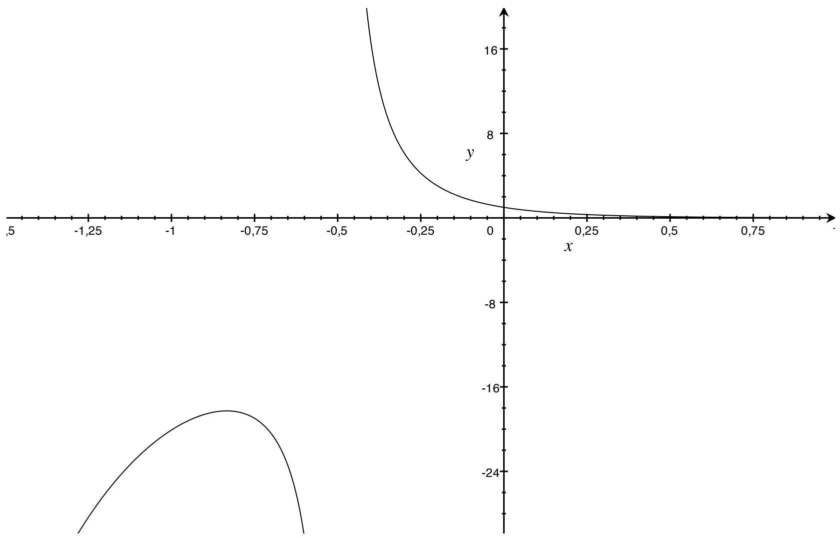
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(-3)\mathrm{e}^{-3x}(2x+1) - \mathrm{e}^{-3x}2}{(2x+1)^2} = \frac{-\mathrm{e}^{-3x}(6x+5)}{(2x+1)^2}.$$

Poiché i fattori e^{-3x} e $(2x+1)^2$ sono sempre positivi nel dominio si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-5/6, -1/2[\cup]-1/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -5/6, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -5/6[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-5/6, -1/2[$ e in $]-1/2, +\infty[$, mentre è crescente in $]-\infty, -5/6[$. In $x = -5/6$ ammette un massimo relativo.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = -\frac{\big[(-3)\mathrm{e}^{-3x}(6x+5) + \mathrm{e}^{-3x}6\big](2x+1)^2 - \mathrm{e}^{-3x}(6x+5)2(2x+1)2}{(2x+11)^4}$$
$$= -\frac{\big[(-3)\mathrm{e}^{-3x}(6x+5) + \mathrm{e}^{-3x}6\big](2x+1) - \mathrm{e}^{-3x}(6x+5)4}{(2x+1)^3} = \frac{\mathrm{e}^{-3x}(36x^2+60x+29)}{(2x+1)^3}.$$

Poiché il polinomio $36x^2 + 60x + 29$ è sempre positivo, la derivata seconda è positiva se e solo se $(2x+1)^3 > 0$ cioè $x > -1/2$. In definitiva $g''(x) > 0$ se $x \in]-1/2, +\infty[$ e $g''(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -1/2[$ perciò la funzione è convessa in $]-1/2, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, -1/2[$.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^4+1}}4t^3 = \frac{2t^3}{\sqrt{t^4+1}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{2t^3}{\sqrt{t^4+1}} = 3\sqrt{t^4+1} + 2t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 3t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$y(t) = \mathrm{e}^{3t} \int \mathrm{e}^{-3t} 2t^2\, dt = \mathrm{e}^{3t}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}2t^2 - \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}4t\, dt\Big) = \mathrm{e}^{3t}\bigg(-\mathrm{e}^{-3t}\frac{2t^2}{3} + \frac{4}{3}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}t - \int \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}\, dt\Big)\bigg)$$
$$= \mathrm{e}^{3t}\bigg(-\mathrm{e}^{-3t}\frac{2t^2}{3} - \mathrm{e}^{-3t}\frac{4t}{9} - \frac{4}{27}\mathrm{e}^{-3t} + c\bigg) = c\,\mathrm{e}^{3t} - \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{4}{27},$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $1 = c - 4/27$ cioè $c = 31/27$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{31}{27}\mathrm{e}^{3t} - \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\, ds + 1\right)$$

dove $A(t) = \int_0^t a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = 3t$ e

$$y(t) = \mathrm{e}^{3t}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-3s} 2s^2\, ds + 1\right) = \mathrm{e}^{3t}\left(-(\frac{2t^2}{3} + \frac{4t}{9} + \frac{4}{27})\mathrm{e}^{-3t} + \frac{4}{27} + 1\right) = \frac{31}{27}\mathrm{e}^{3t} - \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}.$$

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x^2-1}{x^3}\Big)\, dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx$$
$$= 2\operatorname{arcsen} x + 3\ln|x| - \frac{x^{-2}}{-2} + c = 2\operatorname{arcsen} x + 3\ln|x| + \frac{1}{2x^2} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando il metodo per parti due volte di seguito si ha

$$\int_0^1 (2x^2 - x)\mathrm{e}^{-x}\, dx = \Big[(2x^2-x)(-\mathrm{e}^{-x})\Big]_0^1 - \int_0^1 (4x-1)(-\mathrm{e}^{-x})\, dx = -\mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 (4x-1)\mathrm{e}^{-x}\, dx$$
$$= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[(4x-1)(-\mathrm{e}^{-x})\Big]_0^1 - \int_0^1 4(-\mathrm{e}^{-x})\, dx = -\mathrm{e}^{-1} + (-3\mathrm{e}^{-1} - 1) + \Big[-4\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = \frac{3\mathrm{e} - 8}{\mathrm{e}}.$$