



Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome		Nome	
Corso di Laurea	VIT	STAL	Matricola
Vecchio ordinamento	SI	NO	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ è ☐ A $-\infty$ ☐ B $+\infty$ ☐ C non esiste ☐ D non ci sono elementi sufficienti per rispondere	2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora ☐ A x_0 è punto di minimo relativo per f ☐ B x_0 è punto di massimo relativo per f ☐ C x_0 è punto critico per f ☐ D nessuna delle precedenti
3 L'equazione differenziale $y' = 5t - t \ln y$ è ☐ A un'equazione lineare del primo ordine ☐ B un'equazione lineare del secondo ordine ☐ C un'equazione non lineare del primo ordine ☐ D un'equazione non lineare del secondo ordine	4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{\pi}{e}$ rappresenta ☐ A una retta ☐ B una parabola ☐ C un'iperbole ☐ D nessuna delle precedenti
5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico. $\mathcal{D} =$ $\mathcal{I} =$ Grafico	

6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{1 - 2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$; b) studiare il segno di g ; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g .

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y - t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

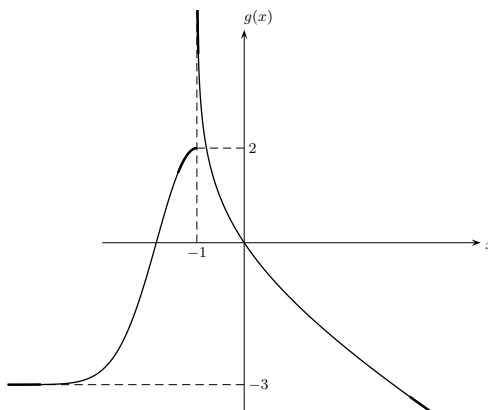
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4x^5 + 3}{x^2} - \frac{5}{x^2 + 1} \right) dx, \quad \int_0^1 (2x - x^2)e^{-2x} dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 1 settembre 2010

- 1** A; **2** C; **3** C; **4** A; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



- 9** a) La funzione è definita se $1 - 2x \neq 0$ cioè $x \neq 1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.
 b) Il numeratore è sempre positivo dunque la funzione è positiva per $x < 1/2$, negativa per $x > 1/2$.
 c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \left[\frac{0}{+\infty} \right] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow (1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{e}{0^\mp} \right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo, mentre, utilizzando il limite fondamentale $\lim_{z \rightarrow +\infty} e^z/z = +\infty$ (oppure, alternativamente, il teorema di de L'Hôpital) si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x/x}{1/x-2} = \left[\frac{+\infty}{-2} \right] = -\infty.$$

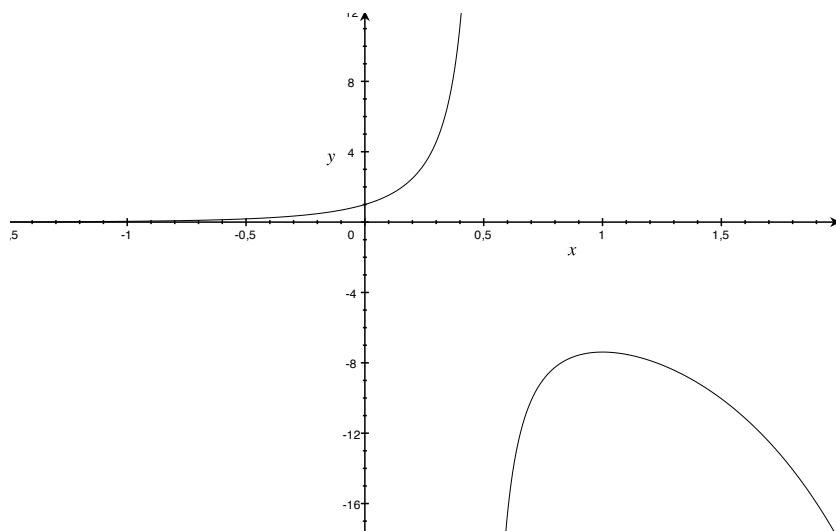
- d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2e^{2x}(1-2x) - e^{2x}(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{4e^{2x}(1-x)}{(2x-1)^2}.$$

Poiché i fattori e^{2x} e $(2x-1)^2$ sono sempre positivi nel dominio si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1/2[\cup]1/2, 1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]1, +\infty[$, mentre è crescente in $] -\infty, 1/2[$ e in $]1/2, 1[$. In $x = 1$ ammette un massimo relativo.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= 4 \frac{[2e^{2x}(1-x) - e^{2x}](2x-1)^2 - e^{2x}(1-x)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} \\ &= 4 \frac{[2e^{2x}(1-x) - e^{2x}](2x-1) - e^{2x}(1-x)4}{(2x-1)^3} = \frac{4e^{2x}(4x^2 - 8x - 5)}{(1-2x)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $4x^2 - 8x - 5$ è sempre positivo, la derivata seconda è positiva se e solo se $(1-2x)^3 > 0$ cioè $x < 1/2$. In definitiva $g''(x) > 0$ se $x \in]-\infty, 1/2[$ e $g''(x) < 0$ se $x \in]1/2, +\infty[$ perciò la funzione è convessa in $] -\infty, 1/2[$, mentre è concava in $]1/2, +\infty[$.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}2t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = 2\sqrt{t^2+1} - t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq 2$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 2t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2t} \int e^{-2t} (-t^2) dt = e^{2t} \left(\frac{e^{-2t}}{-2} (-t^2) - \int e^{-2t} t dt \right) = e^{2t} \left(\frac{e^{-2t}}{2} t^2 - \left(\frac{e^{-2t}}{-2} t - \int \frac{e^{-2t}}{-2} dt \right) \right) \\ &= e^{2t} \left(\frac{e^{-2t}}{2} t^2 + \frac{e^{-2t}}{2} t + \frac{e^{-2t}}{4} + c \right) = c e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $1 = c + 1/4$ cioè $c = 3/4$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = e^{A(t)} \left(\int_0^t e^{-A(s)} b(s) ds + 1 \right)$$

dove $A(t) = \int_0^t a(s) ds$. In questo caso $A(t) = 2t$ e

$$y(t) = e^{2t} \left(\int_0^t e^{-2s} (-s^2) ds + 1 \right) = e^{2t} \left(\frac{e^{-2t}}{2} t^2 + \frac{e^{-2t}}{2} t + \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.$$

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{4x^5 + 3}{x^2} - \frac{5}{x^2 + 1} \right) dx &= 4 \int x^3 dx + 3 \int x^{-2} dx - 5 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= x^4 + 3 \frac{x^{-1}}{-1} - 5 \arctg x + c = x^4 - \frac{3}{x} - 5 \arctg x + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando il metodo per parti due volte di seguito si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x - x^2) e^{-2x} dx &= \left[(2x - x^2) \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 - \int_0^1 (2 - 2x) \frac{e^{-2x}}{-2} dx = -\frac{e^{-2}}{2} + \int_0^1 (1 - x) e^{-2x} dx \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} + \left[(1 - x) \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 - \int_0^1 (-1) \frac{e^{-2x}}{-2} dx = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} - \left[\frac{e^{-2x}}{-4} \right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4e^2}. \end{aligned}$$