Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 14/07/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a,b[$
- B f è decrescente e convessa in $]a,b[$
- C f è crescente e concava in $]a,b[$
- D f è concava e convessa in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = (t+2)e^y - 5y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = 3x^3 - 5x + 1$ rappresenta

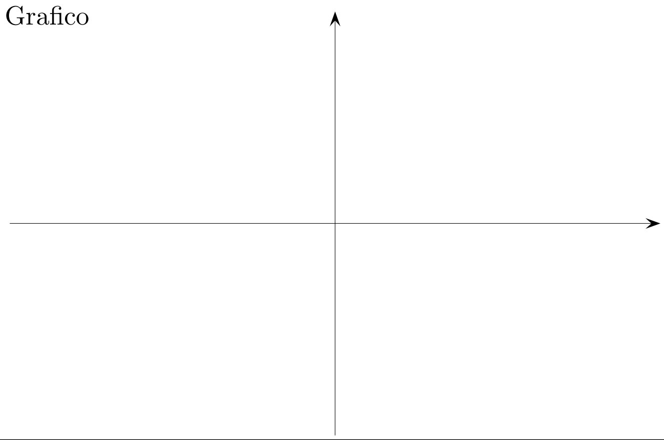
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = -1 + \frac{x-1}{(x-3)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3y^4+1}{y^3t^2} \\ y(-2) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2(t+2)}$ è soluzione del problema per $t < 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

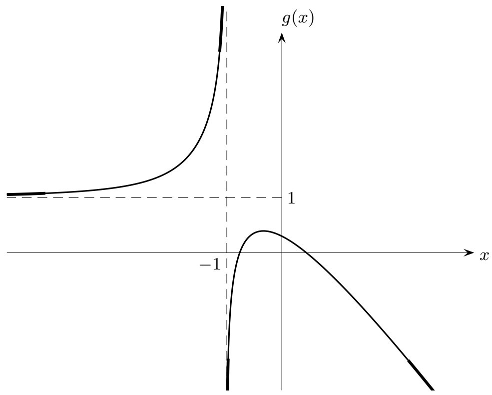
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{x^2-2}{\sqrt{x}} + 5\cos x\Big)\,dx, \qquad \int_0^5 \frac{x-2}{x^2+25}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 luglio 2010

$\boxed{1}$ A; $\boxed{2}$ A; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x - 3 \neq 0$ cioè $x \neq 3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g si può scrivere nella seguente forma

$$g(x) = \frac{-x^2 + 7x - 10}{(x-3)^2}.$$

b) Il numeratore è ≥ 0 se $-x^2 + 7x + 10 \geq 0$ cioè se e solo se $2 \leq x \leq 5$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. La funzione è dunque positiva per $2 < x < 5$ e $x \neq 3$, negativa per $x < 2$ oppure $x > 5$, e si annulla in $x = 2$ oppure $x = 5$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 3 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x - 1/x^2}{(1-3/x)^2} = \left[-1 + \frac{0}{1}\right] = -1, \qquad \lim_{x\to 3} g(x) = \left[-1 + \frac{2}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

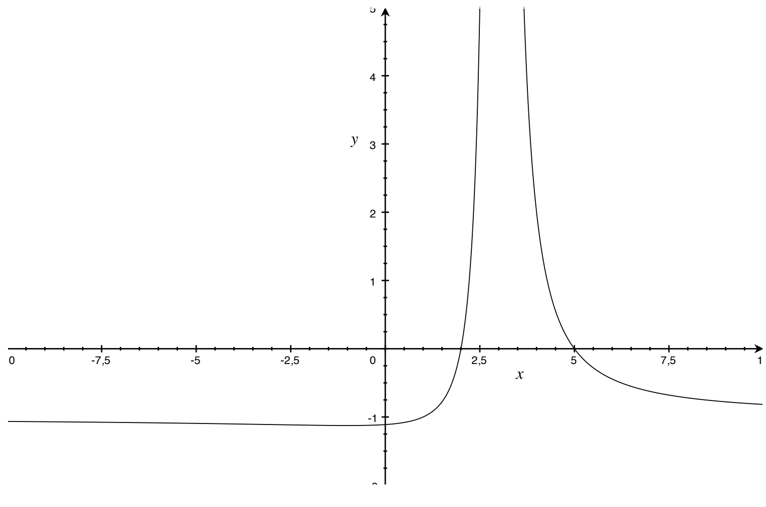
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \left(\frac{x-1}{(x-3)^2}\right)' = \frac{(x-3)^2 - (x-1)2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{(x-3) - (x-1)2}{(x-3)^3} = \frac{-(x+1)}{(x-3)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 quando $x + 1 \leq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1$, il denominatore è positivo se $x - 3 > 0$ cioè $x > 3$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -1, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1, 3[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -1[$ e in $]3, +\infty[$, mentre è crescente in $]-1, 3[$. In $x = -1$ ammette un minimo assoluto.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = -10/9$ e $g'(0) = 1/27$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{1}{27}x - \frac{10}{9}.$$

10 a) Si ha $y'(t) = 2e^{2(t+2)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2e^{2(t+2)} = \frac{3e^{8(t+2)} + 1}{e^{6(t+2)}t^2}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t < 0$ (ad esempio, per $t = -2$ si ottiene $2 \neq 1$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(-2) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y^3}{3y^4 + 1}\, dy = \frac{1}{t^2}\, dt$$

e ricordando che $1/t^2 = t^{-2}$ e integrando

$$\int \frac{y^3}{3y^4 + 1}\, dy = \int t^{-2}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y^3}{3y^4 + 1}\, dy = -\frac{1}{t} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Essendo (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{y^3}{3y^4 + 1}\, dy = \frac{1}{12}\int \frac{12y^3}{3y^4 + 1}\, dt = \frac{1}{12}\int \frac{(3y^4 + 1)'}{3y^4 + 1}\, dt = \frac{1}{12}\ln(3y^4 + 1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = -2$ si ottiene

$$\frac{1}{12}\ln(3y^4 + 1) = -\frac{1}{t} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[4]{\frac{1}{3}\Big(\exp\big(12c - \frac{12}{t}\big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(-2) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{12}\ln 4 = \frac{1}{2} + c,$$

da cui si ricava $c = -\frac{1}{2} + \frac{\ln 4}{12}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{3}\Big(4\exp\big(-6 - \frac{4}{t}\big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z^3}{3z^4 + 1}\, dz = \int_{-2}^t s^{-2}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{12}\ln(3z^4 + 1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{s}\Big]_{-2}^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{12}\ln(3y^4 + 1) - \frac{1}{12}\ln 4 = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{x^2 - 2}{\sqrt{x}} + 5\cos x\Big)\, dx &= \int x^{3/2}\, dx - 2\int x^{-1/2}\, dx + 5\int \cos x\, dx \\ &= \frac{x^{5/2}}{5/2} - 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + 5\,\mathrm{sen}\, x + c = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 5\,\mathrm{sen}\, x + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^5 \frac{x - 2}{x^2 + 25}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2x}{x^2 + 25}\, dx - \int_0^5 \frac{2}{x^2 + 25}\, dx = \Big[\frac{1}{2}\ln(x^2 + 25) - \frac{2}{5}\,\mathrm{arctg}\, \frac{x}{5}\Big]_0^5 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{10}.$$