



Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

**Istruzioni:** apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome		Nome	
Corso di Laurea	<input type="checkbox"/> VIT <input type="checkbox"/> STAL	Matricola	
Vecchio ordinamento	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO	n. fogli (compreso questo)	

<p><b>1</b> Se <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty</math> e <math>\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3</math>, allora <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}</math> è</p> <p><input type="checkbox"/> A <math>-\infty</math></p> <p><input type="checkbox"/> B <math>+\infty</math></p> <p><input type="checkbox"/> C 0</p> <p><input type="checkbox"/> D non ci sono elementi sufficienti per rispondere</p>	<p><b>2</b> Se <math>f</math> è una funzione derivabile due volte in <math>]a, b[</math> e vale <math>f''(x) &gt; 0</math> per ogni <math>x \in ]a, b[</math>, allora</p> <p><input type="checkbox"/> A <math>f</math> è decrescente in <math>]a, b[</math></p> <p><input type="checkbox"/> B <math>f</math> è crescente in <math>]a, b[</math></p> <p><input type="checkbox"/> C <math>f</math> è convessa in <math>]a, b[</math></p> <p><input type="checkbox"/> D <math>f</math> è concava in <math>]a, b[</math></p>
<p><b>3</b> L'equazione differenziale <math>y' = y \operatorname{tg}(t^2 - 2) - \frac{2}{t}</math> è</p> <p><input type="checkbox"/> A un'equazione lineare del primo ordine</p> <p><input type="checkbox"/> B un'equazione lineare del secondo ordine</p> <p><input type="checkbox"/> C un'equazione non lineare del primo ordine</p> <p><input type="checkbox"/> D un'equazione non lineare del secondo ordine</p>	<p><b>4</b> Il grafico della funzione <math>f(x) = \frac{x^2 + 4}{2 + 5}</math> rappresenta</p> <p><input type="checkbox"/> A una retta</p> <p><input type="checkbox"/> B una parabola</p> <p><input type="checkbox"/> C un'iperbole</p> <p><input type="checkbox"/> D nessuna delle precedenti</p>

<p><b>5</b> Per la funzione <math>f(x) = \log_{4/3} x</math>, scrivere il dominio <math>\mathcal{D}</math>, l'immagine <math>\mathcal{I}</math>, e rappresentare qualitativamente il grafico.</p> <p><math>\mathcal{D} =</math></p> <p><math>\mathcal{I} =</math></p>	<p>Grafico</p>
---	----------------

**6** L'integrale definito di una funzione positiva  $f$  su  $[a, b]$  rappresenta:

**7** Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

**8** Rappresentare il grafico di una funzione  $g$  che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$$

**9** Data la funzione

$$g(x) = 3 - \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

a) determinare il dominio  $\mathcal{D}$ , b) studiare il segno di  $g$ ; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa  $x_0 = 3$ ; f) disegnare un grafico approssimativo di  $g$ .

**10** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{4y^2 + 1}{yt^2} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

- a) dire se la funzione  $y(t) = e^{3(t+1)}$  è soluzione del problema per  $t < 0$ ;  
b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

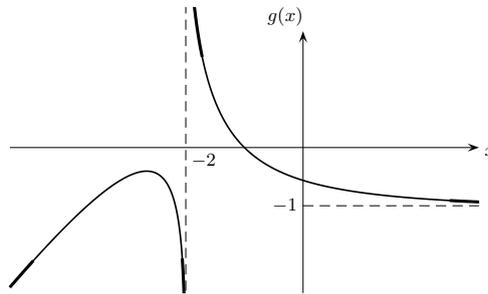
**11** Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left( \frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{x} - 3 \operatorname{sen} x \right) dx, \quad \int_0^3 \frac{2 - 3x}{x^2 + 9} dx.$$

**IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.**

## Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 luglio 2010

- 1 A; 2 C; 3 A; 4 B; 5-6-7 consultare il libro di testo; 8 in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



- 9 a) La funzione è definita se  $x - 1 \neq 0$  cioè  $x \neq 1$ , perciò il dominio è  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che  $g$  si può scrivere nella seguente forma

$$g(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{(x - 1)^2}.$$

- b) Il numeratore è  $\geq 0$  se  $3x^2 - 8x + 4 \geq 0$  cioè se e solo se  $x \leq 2/3$  oppure  $x \geq 2$ , il denominatore è sempre positivo nel dominio. La funzione è dunque positiva per  $x < 2/3$  oppure  $x > 2$ , negativa per  $2/3 < x < 2$ ,  $x \neq 1$ , e si annulla in  $x = 2/3$  oppure  $x = 2$ .
- c) Ha senso andare a studiare i limiti in  $-1$  e a  $\pm\infty$ . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 3 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2/x - 1/x^2}{(1 - 1/x)^2} = \left[ 3 - \frac{0}{1} \right] = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \left[ 3 - \frac{1}{0^+} \right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo.

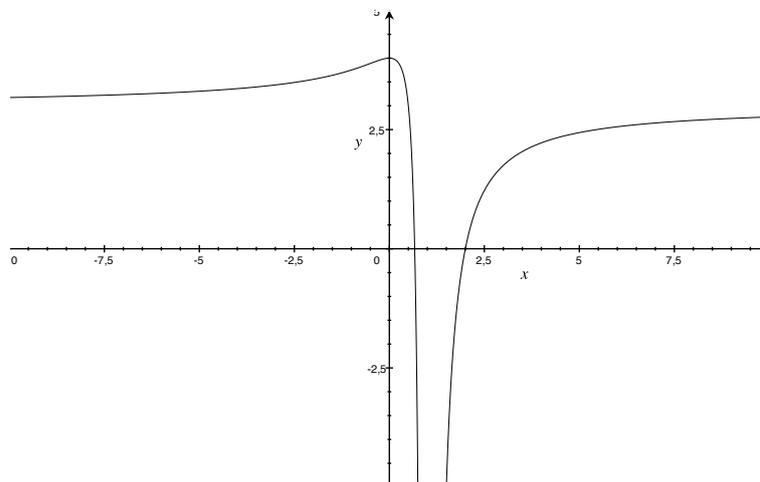
d) La derivata prima è

$$g'(x) = -\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)' = -\frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2(x-1) - (2x-1)2}{(x-1)^3} = \frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Il numeratore è  $\geq 0$  quando  $x \geq 0$ , il denominatore è positivo se  $x - 1 > 0$  cioè  $x > 1$ , quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in ]0, 1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in  $] -\infty, 0[$  e in  $]1, +\infty[$ , mentre è decrescente in  $]0, 1[$ . In  $x = 0$  ammette un massimo assoluto.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto  $(x_0, g(x_0))$  è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché  $g(3) = 7/4$  e  $g'(3) = 3/4$ , l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{3}{4}(x - 3) + \frac{7}{4}.$$

**10** a) Si ha  $y'(t) = 3e^{3(t+1)}$  e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3e^{3(t+1)} = \frac{4e^{6(t+1)} + 1}{e^{3(t+1)t^2}}$$

che non è identicamente soddisfatta per  $t < 0$  (ad esempio, per  $t = -1$  si ottiene  $3 \neq 5$ ). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo  $y(-1) = 1$ .

b) Scrivendo  $y' = \frac{dy}{dt}$  e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{4y^2 + 1} dy = \frac{1}{t^2} dt$$

e ricordando che  $1/t^2 = t^{-2}$  e integrando

$$\int \frac{y}{4y^2 + 1} dy = \int t^{-2} dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{y}{4y^2 + 1} dy = -\frac{1}{t} + c.$$

dove  $c$  è la generica costante d'integrazione. Essendo (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{y}{4y^2 + 1} dy = \frac{1}{8} \int \frac{8y}{4y^2 + 1} dt = \frac{1}{8} \int \frac{(4y^2 + 1)'}{4y^2 + 1} dt = \frac{1}{8} \ln(4y^2 + 1),$$

e poiché  $y(t)$  è positiva vicino a  $t = -1$  si ottiene

$$\frac{1}{8} \ln(4y^2 + 1) = -\frac{1}{t} + c \quad \Longleftrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \exp\left(8c - \frac{8}{t}\right) - 1 \right)}.$$

Imponendo la condizione  $y(-1) = 1$  (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{8} \ln 5 = 1 + c,$$

da cui si ricava  $c = -1 + \frac{\ln 5}{8}$ . La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{4} \left( 5 \exp\left(-8 - \frac{8}{t}\right) - 1 \right)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_1^y \frac{z}{4z^2 + 1} dz &= \int_{-1}^t s^{-2} ds \quad \Longrightarrow \quad \left[ \frac{1}{8} \ln(4z^2 + 1) \right]_1^y = \left[ -\frac{1}{s} \right]_{-1}^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{8} \ln(4y^2 + 1) - \frac{1}{8} \ln 5 = -\frac{1}{t} - 1 \end{aligned}$$

che risolta rispetto a  $y$  fornisce la soluzione cercata.

**11** Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{x} - 3 \operatorname{sen} x \right) dx &= \int x dx + 2 \int x^{-1/2} dx - 3 \int \operatorname{sen} x dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^{1/2}}{1/2} + 3 \cos x + c = \frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} + 3 \cos x + c, \end{aligned}$$

con  $c$  costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^3 \frac{2 - 3x}{x^2 + 9} dx = \int_0^3 \frac{2}{x^2 + 9} dx - \frac{3}{2} \int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 9} dx = \left[ \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) \right]_0^3 = \frac{\pi}{6} - \frac{3 \ln 2}{2}.$$