Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 14/07/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f
- B x_0 è punto di massimo relativo per f
- C x_0 è punto di flesso per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \mathrm{sen}(ty) - 3t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 3$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (1/5)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico

6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta geometricamente:

7 Enunciare il teorema dei punti critici

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = 2 - \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^2+1}{yt^3} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{3(t-2)}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

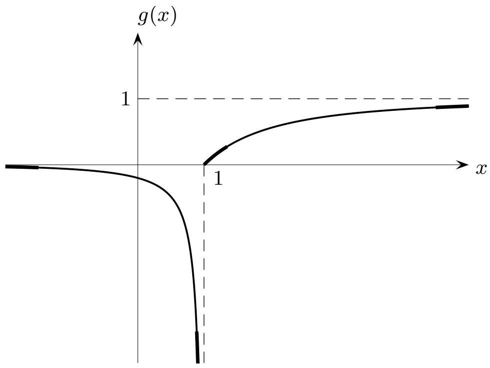
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{\sqrt{x}+3}{x} + 2\,\mathrm{sen}\, x \right) dx, \qquad \int_0^4 \frac{3-5x}{x^2+16}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 luglio 2010

$\boxed{1}$ B; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ C; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x - 2 \neq 0$ cioè $x \neq 2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g si può scrivere nella seguente forma

$$g(x) = \frac{2x^2 - 9x + 9}{(x-2)^2}.$$

b) Il numeratore è ≥ 0 se $2x^2 - 9x + 9 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq 3/2$ oppure $x \geq 3$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. La funzione è dunque positiva per $x < 3/2$ oppure $x > 3$, negativa per $3/2 < x < 3$, $x \neq 2$, e si annulla in $x = 3/2$ oppure $x = 3$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 2 - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x - 1/x^2}{(1-2/x)^2} = \left[2 - \frac{0}{1}\right] = 2, \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = \left[2 - \frac{1}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo.

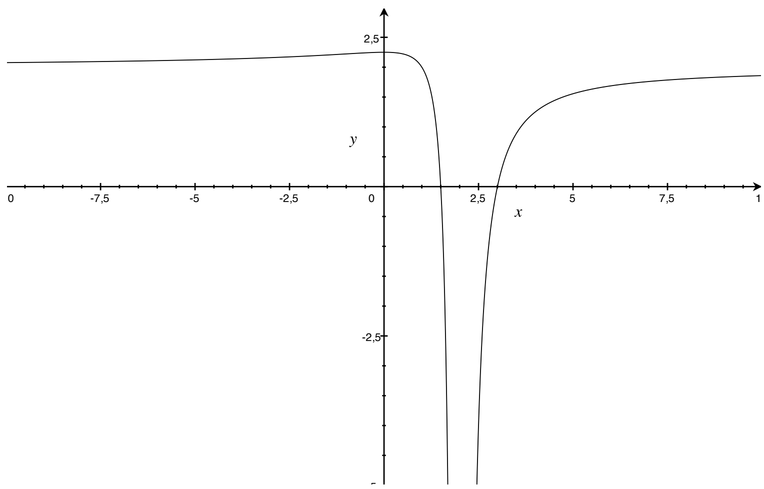
d) La derivata prima è

$$g'(x) = -\Big(\frac{x-1}{(x-2)^2}\Big)' = -\frac{(x-2)^2 - (x-1)2(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{(x-2)-(x-1)2}{(x-2)^3} = \frac{x}{(x-2)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 quando $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x - 2 > 0$ cioè $x > 2$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]2, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, 2[$. In $x = 0$ ammette un massimo assoluto.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = 2$ e $g'(1) = -1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -(x - 1) + 2.$$

10 a) Si ha $y'(t) = 3e^{3(t-2)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3e^{3(t-2)} = \frac{2e^{6(t-2)} + 1}{e^{3(t-2)}t^3}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 2$ si ottiene $3 \neq 3/8$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(2) = 1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{2y^2 + 1}\, dy = \frac{1}{t^3}\, dt$$

e ricordando che $1/t^3 = t^{-3}$ e integrando

$$\int \frac{y}{2y^2 + 1}\, dy = \int t^{-3}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y}{2y^2 + 1}\, dy = -\frac{1}{2t^2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Essendo (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{y}{2y^2 + 1}\, dy = \frac{1}{4} \int \frac{4y}{2y^2 + 1}\, dt = \frac{1}{4} \int \frac{(2y^2 + 1)'}{2y^2 + 1}\, dt = \frac{1}{4} \ln(2y^2 + 1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = 2$ si ottiene

$$\frac{1}{4} \ln(2y^2 + 1) = -\frac{1}{2t^2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(\exp\big(4c - \frac{2}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(2) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{4} \ln 3 = -\frac{1}{8} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{8} + \frac{\ln 3}{4}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(3 \exp\big(\frac{1}{2} - \frac{2}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z}{2z^2 + 1}\, dz = \int_2^t s^{-3}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{4} \ln(2z^2 + 1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{2s^2}\Big]_2^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{4} \ln(2y^2 + 1) - \frac{1}{4} \ln 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2t^2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{\sqrt{x} + 3}{x} + 2 \operatorname{sen} x\Big)\, dx &= \int x^{1/2}\, dx + 3 \int \frac{1}{x}\, dx + 2 \int \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \frac{x^{3/2}}{3/2} + 3 \ln|x| - 2 \cos x + c = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 3 \ln|x| - 2 \cos x + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^4 \frac{3 - 5x}{x^2 + 16}\, dx = \int_0^4 \frac{3}{x^2 + 16}\, dx - \frac{5}{2} \int_0^4 \frac{2x}{x^2 + 16}\, dx = \Big[\frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 16)\Big]_0^4 = \frac{3\pi}{16} - \frac{5 \ln 2}{2}.$$