Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 14/07/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è decrescente in $]a,b[$
- B f è crescente in $]a,b[$
- C f è convessa in $]a,b[$
- D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = 2^t y + y' \cos t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = -\dfrac{3}{5x}$ rappresenta

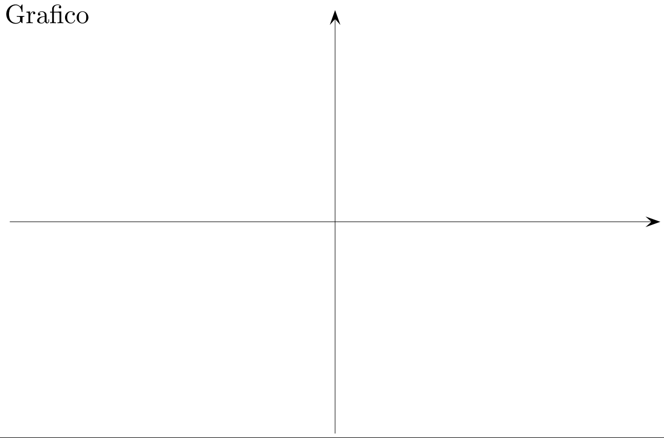
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a,b[$ è:

7 Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

9 Data la funzione

$$g(x) = 1 + \frac{3x+5}{(x+1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -2$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^4+1}{y^3t^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2(t-1)}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

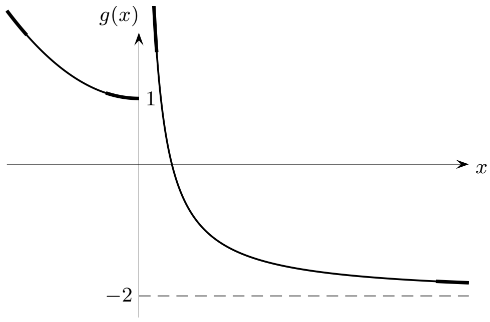
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}} - 4\cos x\right) dx, \qquad \int_0^2 \frac{3x+1}{x^2+4}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 luglio 2010

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ B; $\boxed{4}$ C; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x + 1 \neq 0$ cioè $x \neq -1$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g si può scrivere nella seguente forma

$$g(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{(x+1)^2}.$$

b) Il numeratore è ≥ 0 se $x^2 + 5x + 6 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -3$ oppure $x \geq -2$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. La funzione è dunque positiva per $x < -3$, oppure $-2 < x < -1$ oppure $x > -1$, negativa per $-3 < x < -2$, e si annulla in $x = -2$ oppure $x = -3$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -1 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 1 + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3/x + 5/x^2}{(1 + 1/x)^2} = \left[1 + \frac{0}{1}\right] = 1, \qquad \lim_{x \to -1} g(x) = \left[1 + \frac{2}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

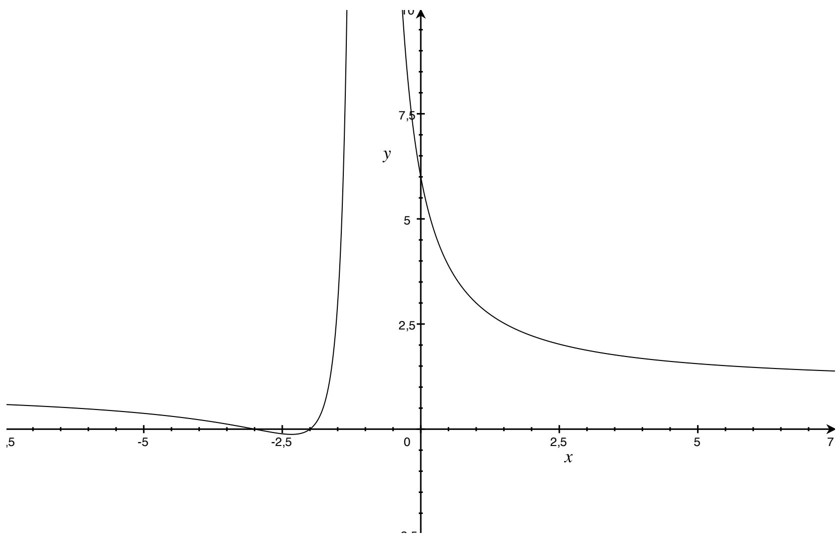
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \Big(\frac{3x+5}{(x+1)^2}\Big)' = \frac{3(x+1)^2 - (3x+5)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{3(x+1) - (3x+5)2}{(x+1)^3} = \frac{-(3x+7)}{(x+1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 quando $3x + 7 \leq 0$ cioè se e solo se $x \leq -7/3$, il denominatore è positivo se $x + 1 > 0$ cioè $x > -1$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -7/3[\cup]-1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -7/3, \\ > 0, & \text{se } x \in]-7/3, -1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -7/3[$ e in $]-1, +\infty[$, mentre è crescente in $]-7/3, -1[$. In $x = -7/3$ ammette un minimo assoluto.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-2) = 0$ e $g'(-2) = 1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = x + 2.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ a) Si ha $y'(t) = 2\mathrm{e}^{2(t-1)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\mathrm{e}^{2(t-1)} = \frac{2\mathrm{e}^{8(t-1)} + 1}{\mathrm{e}^{6(t-1)}t^3}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $2 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y^3}{2y^4 + 1}\, dy = \frac{1}{t^3}\, dt$$

e ricordando che $1/t^3 = t^{-3}$ e integrando

$$\int \frac{y^3}{2y^4 + 1}\, dy = \int t^{-3}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y^3}{2y^4 + 1}\, dy = -\frac{1}{2t^2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Essendo (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{y^3}{2y^4 + 1}\, dy = \frac{1}{8}\int \frac{8y^3}{2y^4 + 1}\, dt = \frac{1}{8}\int \frac{(2y^4 + 1)'}{2y^4 + 1}\, dt = \frac{1}{8}\ln(2y^4 + 1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = 1$ si ottiene

$$\frac{1}{8}\ln(2y^4 + 1) = -\frac{1}{2t^2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(\exp\big(8c - \frac{4}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{8}\ln 3 = -\frac{1}{2} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{2} + \frac{\ln 3}{8}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(3\exp\big(4 - \frac{4}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{z^3}{2z^4 + 1}\, dz = \int_1^t s^{-3}\, ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{8}\ln(2z^4 + 1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{2s^2}\Big]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{8}\ln(2y^4 + 1) - \frac{1}{8}\ln 3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{1 - x}{2\sqrt{x}} - 4\cos x\Big)\, dx &= \frac{1}{2}\int x^{-1/2}\, dx - \frac{1}{2}\int x^{1/2}\, dx - 4\int \cos x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{1}{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} - 4\,\mathrm{sen}\, x + c = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3} - 4\,\mathrm{sen}\, x + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{3x + 1}{x^2 + 4}\, dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 4}\, dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4}\, dx + = \Big[\frac{3}{2}\ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\Big]_0^2 = \frac{3\ln 2}{2} + \frac{\pi}{8}.$$