Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 23/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0^+
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \dfrac{y}{\cos t} - t^2$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{3^x + 2}$ rappresenta

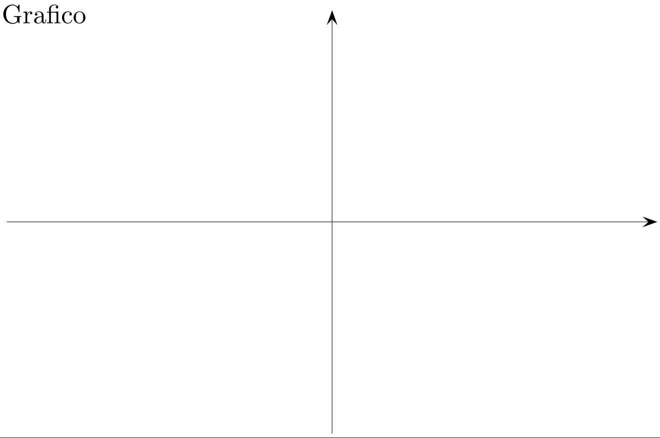
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{1-x^2}{x^2+5x+6}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^3\cos(t^4) - 2t^3}{y\sqrt[7]{y}} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (3t-1)^7$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

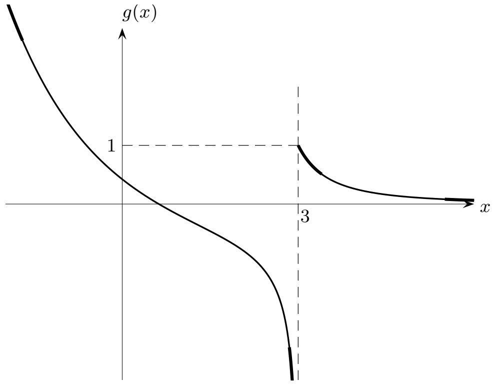
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{3\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx, \qquad \int_0^\pi 3x\cos(2x^2+1)\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 23 febbraio 2010

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ A; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x^2+5x+6 \neq 0$ cioè $x \neq -2$ $x \neq -3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $1 - x^2 \geq 0$ cioè se e solo se $-1 \leq x \leq 1$. Il denominatore è positivo se $x^2+5x+6 > 0$ cioè se $x < -3$ oppure $x > -2$. La funzione è dunque positiva per $-3 < x < 2$ oppure $-1 < x < 1$, negativa per $x < -3$ oppure $-2 < x < -1$ oppure $x > 1$. Si annulla in $x = -1$ e $x = 1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -3, in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x^2 - 1}{1 + 5/x + 6/x^2} = \left[\frac{-1}{1}\right] = -1,$$

$$\lim_{x\to(-3)^\pm} g(x) = \left[\frac{-8}{0^\mp}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to(-2)^\pm} g(x) = \left[\frac{-3}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

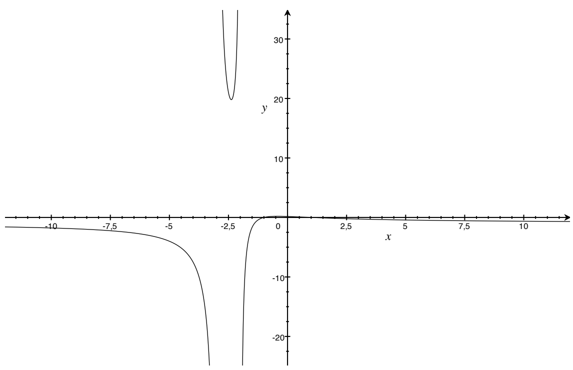
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-2x(x^2+5x+6) - (1-x^2)(2x+5)}{(x^2+5x+6)^2} = -\frac{5x^2+14x+5}{(x^2+5x+6)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $5x^2 + 14x + 5 \leq 0$ cioè se e solo se $\frac{-7-\sqrt{24}}{5} \leq x \leq \frac{-7+\sqrt{24}}{5}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -3[\cup]-3, \frac{-7-\sqrt{24}}{5}[\cup]\frac{-7+\sqrt{24}}{5}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{-7-\sqrt{24}}{5} \text{ oppure } x = \frac{-7+\sqrt{24}}{5}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\frac{-7-\sqrt{24}}{5}, -2[\cup]-2, \frac{-7+\sqrt{24}}{5}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]\frac{-7-\sqrt{24}}{5}, -2[$ e in $]-2, \frac{-7+\sqrt{24}}{5}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, -3[$, in $]-3, \frac{-7-\sqrt{24}}{5}[$ e in $]\frac{-7+\sqrt{24}}{5}, +\infty[$. In $x = \frac{-7-\sqrt{24}}{5}$ ed $x = \frac{-7+\sqrt{24}}{5}$ ammette, rispettivamente, un minimo ed un massimo relativo.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = 0$ e $g'(1) = -1/6$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{1}{6}(x - 1).$$

10 a) Si ha $y'(t) = 21(3t - 1)^6$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$21(3t-1)^6 = \frac{t^3 \cos(t^4) - 2t^3}{(3t-1)^8}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $21 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = -1$.

b) Si osservi che $y\sqrt[7]{y} = y^{8/7}$. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^{8/7}\,dy = \big(t^3\cos(t^4) - 2t^3\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{8/7}\,dy = \int \big(t^3\cos(t^4) - 2t^3\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{15/7}}{15/7} = \int t^3\cos(t^4)\,dt - \frac{t^4}{2}.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo mediante la seconda tabella

$$\int t^3\cos(t^4)\,dt = \frac{1}{4}\int 4t^3\cos(t^4)\,dt = \frac{1}{4}\int (t^4)'\cos(t^4)\,dt = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(t^4) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{7}{15}y^{15/7} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(t^4) - \frac{t^4}{2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[15]{\Big(\frac{15}{28}\operatorname{sen}(t^4) - \frac{15}{14}t^4 + \frac{15c}{7}\Big)^7}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = -1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $-\frac{7}{15} = c$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[15]{\Big(\frac{15}{28}\operatorname{sen}(t^4) - \frac{15}{14}t^4 - 1\Big)^7}$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{-1}^{y} z^{8/7}\,dz = \int_0^t \big(s^3\cos(s^4) - 2s^3\big)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{z^{15/7}}{15/7}\Big]_{-1}^{y} = \Big[\frac{1}{4}\operatorname{sen}(s^4) - \frac{s^4}{2}\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{7}{15}y^{15/7} + \frac{7}{15} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(t^4) - \frac{t^4}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{3\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx = 3\int \frac{1}{x}\,dx - \int x^{-4/3}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= 3\ln|x| - \frac{x^{-1/3}}{-1/3} - \frac{1}{3}\operatorname{arcsen} x + c = 3\ln|x| + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3}\operatorname{arcsen} x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\int_0^\pi 3x\cos(2x^2+1)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\pi 4x\cos(2x^2+1)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\pi (2x^2+1)'\cos(2x^2+1)\,dx$$
$$= \frac{3}{4}\Big[\operatorname{sen}(2x^2+1)\Big]_0^\pi = \frac{3}{4}\big(\operatorname{sen}(2\pi^2+1) - \operatorname{sen} 1\big).$$