Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 23/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 1
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a,b[$
- B f è decrescente e convessa in $]a,b[$
- C f è crescente e concava in $]a,b[$
- D f è concava e convessa in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = t\ln y - 4t^3y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2-5x}{3-1}$ rappresenta

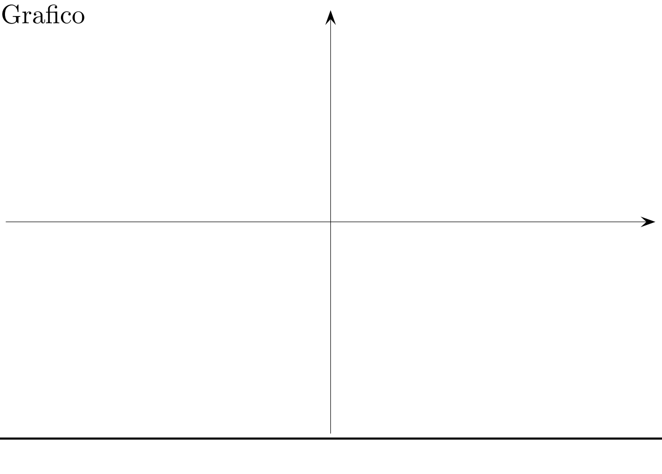
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{1/9} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 L'integrale definito di una funzione positiva f su $[a,b]$ rappresenta:

7 Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0 \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)=1$$

9 Data la funzione

$$g(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+x-2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0=3$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\dfrac{2t^3\operatorname{sen}(t^4)-3t^2}{y\sqrt[5]{y}} \\ y(0)=-1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t)=(4t-1)^5$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

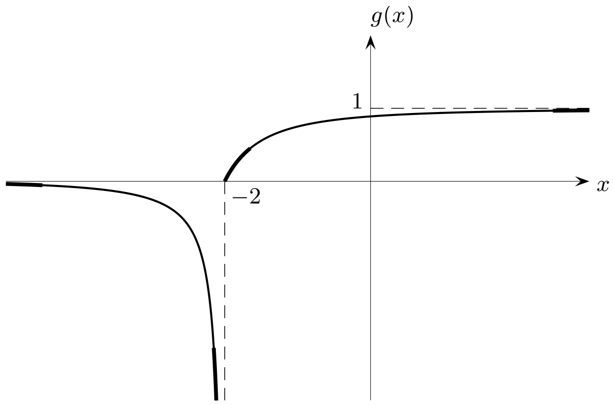
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int\left(\frac{3x^2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}-\frac{4}{3\cos^2 x}\right)dx, \qquad \int_0^1 \frac{1+2x}{3x^2+12}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 23 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ C; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ A; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $x^2 + x - 2 \neq 0$ cioè $x \neq 1$ $x \neq -2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $3x^2 - 1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/\sqrt{3}$ oppure $x \geq 1/\sqrt{3}$. Il denominatore è positivo se $x^2 + x - 2 > 0$ cioè se $x < -2$ oppure $x > 1$. La funzione è dunque positiva per $x < -2$ oppure $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ oppure $x > 1$, negativa per $-2 < x < 1/\sqrt{3}$ oppure $1/\sqrt{3} < x < 1$, mentre si annulla in $x = -1/\sqrt{3}$ e $x = 1/\sqrt{3}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1, in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 - 1/x^2}{1 + 1/x - 2/x^2} = \left[\frac{3}{1}\right] = 3,$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{2}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to (-2)^\pm} g(x) = \left[\frac{11}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

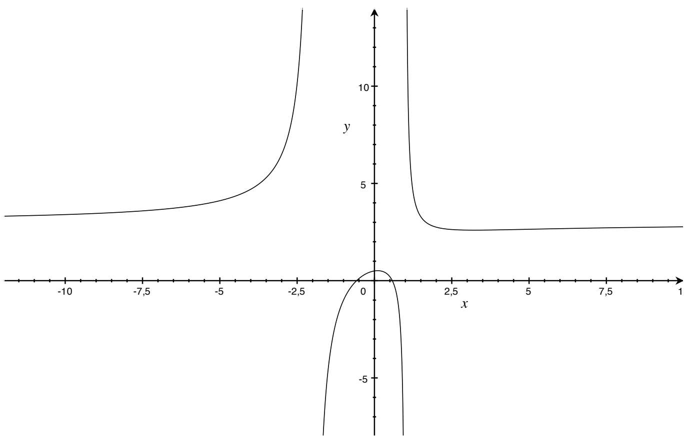
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{6x(x^2 + x - 2) - (3x^2 - 1)(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{3x^2 - 10x + 1}{(x^2 + x - 2)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $3x^2 - 10x + 1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq \frac{5-\sqrt{22}}{3}$ oppure $x \geq \frac{5+\sqrt{22}}{3}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]-2, \frac{5-\sqrt{22}}{3}[\cup]\frac{5+\sqrt{22}}{3}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{5-\sqrt{22}}{3} \text{ oppure } x = \frac{5+\sqrt{22}}{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]\frac{5-\sqrt{22}}{3}, 1[\cup]1, \frac{5+\sqrt{22}}{3}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]\frac{5-\sqrt{22}}{3}, 1[$ e in $]1, \frac{5+\sqrt{22}}{3}[$, mentre è crescente in $]-\infty, -2[$, in $]-2, \frac{5-\sqrt{22}}{3}[$ e in $]\frac{5+\sqrt{22}}{3}, +\infty[$. In $x = \frac{5+\sqrt{22}}{3}$ ed $x = \frac{5-\sqrt{22}}{3}$ ammette, rispettivamente, un minimo ed un massimo relativo.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(3) = 13/5$ e $g'(3) = -1/50$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{1}{50}(x-3) + \frac{13}{5}.$$

10 a) Si ha $y'(t) = 20(4t-1)^4$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$20(4t-1)^4 = \frac{2t^3 \operatorname{sen}(t^4) - 3t^2}{(4t-1)^6}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $20 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = -1$.

b) Si osservi che $y\sqrt[6]{y} = y^{6/5}$. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^{6/5}\,dy = \big(2t^3 \operatorname{sen}(t^4) - 3t^2\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{6/5}\,dy = \int \big(2t^3 \operatorname{sen}(t^4) - 3t^2\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{11/5}}{11/5} = \int 2t^3 \operatorname{sen}(t^4)\,dt - t^3.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo mediante la seconda tabella

$$\int 2t^3 \operatorname{sen}(t^4)\,dt = \frac{1}{2}\int 4t^3 \operatorname{sen}(t^4)\,dt = \frac{1}{2}\int (t^4)' \operatorname{sen}(t^4)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t^4) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{5}{11}y^{11/5} = -\frac{1}{2}\cos(t^4) - t^3 + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[11]{\Big(-\frac{11}{10}\cos(t^4) - \frac{11}{5}t^3 + \frac{11c}{5}\Big)^5}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = -1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $-\frac{5}{11} = -\frac{1}{2} + c$ da cui segue $c = \frac{1}{22}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[11]{\Big(-\frac{11}{10}\cos(t^4) - \frac{11}{5}t^3 + \frac{1}{10}\Big)^5}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{y} z^{6/5}\,dz = \int_0^t \big(2s^3 \operatorname{sen}(s^4) - 3s^2\big)\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{z^{11/5}}{11/5}\Big]_{-1}^{y} = \Big[-\frac{1}{2}\cos(s^4) - s^3\Big]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{5}{11}y^{11/5} + \frac{5}{11} = -\frac{1}{2}\cos(t^4) - t^3 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{3x^2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3\cos^2 x}\Big)\,dx &= 3\int x^{3/2}\,dx - \int x^{-1/6}\,dx - \frac{4}{3}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \\ &= 3\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{5/6}}{5/6} - \frac{4}{3}\operatorname{tg} x + c = \frac{6}{5}\sqrt{x^5} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{4}{3}\operatorname{tg} x + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1+2x}{3x^2+12}\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{6x}{3x^2+12}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(3x^2+12)'}{3x^2+12}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \ln(3x^2+12)\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \ln 15 - \ln 12\Big).\end{aligned}$$