Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 23/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- A $-\infty$
- B 0^+
- C 0^-
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x) > 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è decrescente in $]a,b[$
- B f è crescente in $]a,b[$
- C f è convessa in $]a,b[$
- D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = te^y + y'(t+5)$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{7-2x}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico

6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

7 Enunciare il teorema dei punti critici

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t\,\mathrm{sen}(2t^2) + 3t^5}{y\sqrt[3]{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (2t+1)^3$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

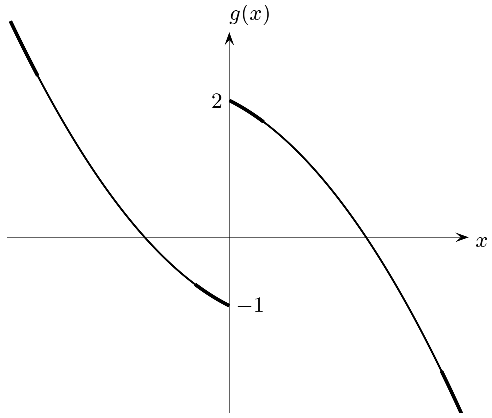
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{2x^2\sqrt{x} - 1}{x^3} + \frac{5}{\mathrm{sen}^2\, x} \right) dx, \qquad \int_0^1 \frac{3 - 5x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 23 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ C; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ cioè $x \neq 1$, $x \neq 3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $2x^2 - 1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/\sqrt{2}$ oppure $x \geq 1/\sqrt{2}$. Il denominatore è positivo se $x^2 - 4x + 3 > 0$ cioè se $x < 1$ oppure $x > 3$. La funzione è dunque positiva per $x < -1/\sqrt{2}$ oppure $1/\sqrt{2} < x < 1$ oppure $x > 3$, negativa per $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ oppure $1 < x < 3$, mentre si annulla in $x = -1/\sqrt{2}$ e $x = 1/\sqrt{2}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1, in 3 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 - 1/x^2}{1 - 4/x + 3/x^2} = \left[\frac{2}{1}\right] = 2,$$

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} g(x) = \left[\frac{1}{0^{\mp}}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to 3^{\pm}} g(x) = \left[\frac{17}{0^{\pm}}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

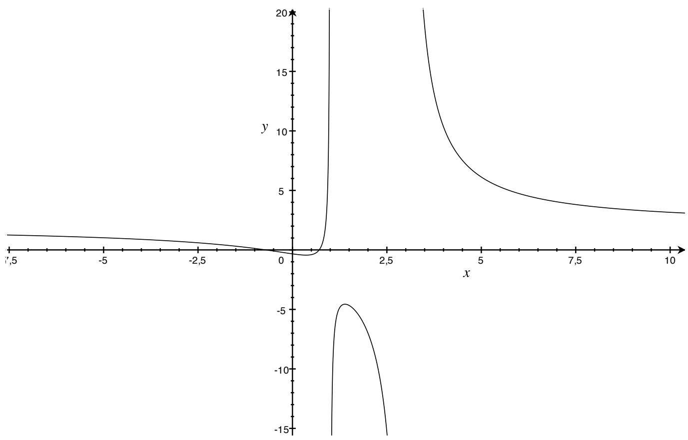
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{4x(x^2 - 4x + 3) - (2x^2 - 1)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 2\frac{-4x^2 + 7x - 2}{(x^2 - 4x + 3)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $-4x^2 + 7x - 2 \geq 0$ cioè se e solo se $\frac{7-\sqrt{17}}{8} \leq x \leq \frac{7+\sqrt{17}}{8}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{8}[\cup]\frac{7+\sqrt{17}}{8}, 3[\cup]3, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{7-\sqrt{17}}{8} \text{ oppure } x = \frac{7+\sqrt{17}}{8}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\frac{7-\sqrt{17}}{8}, 1[\cup]1, \frac{7+\sqrt{17}}{8}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]\frac{7-\sqrt{17}}{8}, 1[$ e in $]1, \frac{7+\sqrt{17}}{8}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{8}[$, in $]\frac{7+\sqrt{17}}{8}, 3[$ e in $]3, +\infty[$. In $x = \frac{7-\sqrt{17}}{8}$ ed $x = \frac{7+\sqrt{17}}{8}$ ammette, rispettivamente, un minimo ed un massimo relativo.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = 1/8$ e $g'(-1) = -13/32$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{13}{32}(x+1) + \frac{1}{8}.$$

10 a) Si ha $y'(t) = 6(2t+1)^2$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$6(2t+1)^2 = \frac{t\,\mathrm{sen}(2t^2) + 3t^5}{(2t+1)^4}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $6 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si osservi che $y\sqrt[3]{y} = y^{4/3}$. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^{4/3}\,dy = \big(t\,\mathrm{sen}(2t^2) + 3t^5\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{4/3}\,dy = \int \big(t\,\mathrm{sen}(2t^2) + 3t^5\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{7/3}}{7/3} = \int t\,\mathrm{sen}(2t^2)\,dt + \frac{3}{6}t^6.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo mediante la seconda tabella

$$\int t\,\mathrm{sen}(2t^2)\,dt = \frac{1}{4}\int 4t\,\mathrm{sen}(2t^2)\,dt = \frac{1}{4}\int (2t^2)'\,\mathrm{sen}(2t^2)\,dt = -\frac{1}{4}\cos(2t^2) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{3}{7}y^{7/3} = -\frac{1}{4}\cos(2t^2) + \frac{3}{6}t^6 + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \Big(-\frac{7}{12}\cos(2t^2) + \frac{7}{6}t^6 + \frac{7c}{3}\Big)^{3/7}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $\frac{3}{7} = -\frac{1}{4} + c$ da cui segue $c = \frac{19}{28}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \Big(-\frac{7}{12}\cos(2t^2) + \frac{7}{6}t^6 + \frac{19}{12}\Big)^{3/7}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^{4/3}\,dz = \int_0^t \big(s\,\mathrm{sen}(2s^2) + 3s^5\big)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{7/3}}{7/3}\right]_1^y = \left[-\frac{1}{4}\cos(2s^2) + \frac{s^6}{2}\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{7}y^{7/3} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{4}\cos(2t^2) + \frac{t^6}{2} + \frac{1}{4}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2x^2\sqrt{x} - 1}{x^3} + \frac{5}{\mathrm{sen}^2 x}\Big)\,dx = 2\int x^{-1/2}\,dx - \int x^{-3}\,dx + 5\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}\,dx$$

$$= 2\frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{x^{-2}}{-2} - 5\,\mathrm{cotg}\,x + c = 4\sqrt{x} + \frac{1}{2x^2} - 5\,\mathrm{cotg}\,x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\int_0^1 \frac{3 - 5x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx = 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$= 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \frac{5}{2}\int_0^1 (4-x^2)'(4-x^2)^{-1/2}\,dx$$

$$= \Big[3\,\mathrm{arcsen}(x/2) + 5\sqrt{4-x^2}\Big]_0^1 = 3\,\mathrm{arcsen}\,\frac{1}{2} + 5\sqrt{3} - 10 = \frac{\pi}{2} + 5\sqrt{3} - 10.$$