Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 02/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

A $-\infty$

B -3

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = 3t - (t+5)\ln y$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3-2x}{7+4x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (3/4)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico

$\boxed{6}$ La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta:

$\boxed{7}$ Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

$\boxed{8}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$\boxed{9}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{1-4x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{10}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^8 + 3t\cos(2t)}{4^y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 2 - \ln(\mathrm{e} + 5t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

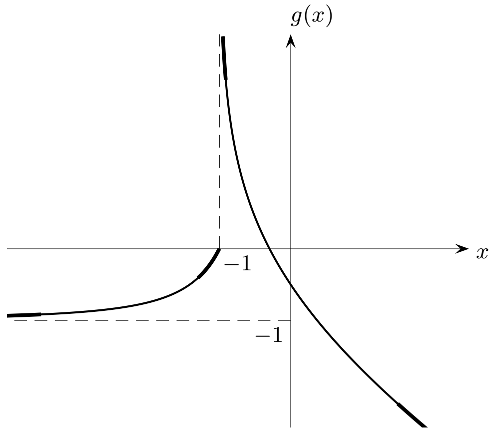
$\boxed{11}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{7x^2 - x^3 5^x}{x^3} - \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx, \qquad \int_0^{\pi/2} (1-4x)\operatorname{sen}(3x)\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 2 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ C; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $1 - 4x \neq 0$ cioè $x \neq 1/4$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/4\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se $x^3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x < 1/4$. La funzione è dunque positiva per $0 < x < 1/4$, negativa per $x < 0$ oppure $x > 1/4$, e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/4$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1/x - 4} = \left[\frac{+\infty}{-4}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to(1/4)^\pm} g(x) = \left[\frac{1/64}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

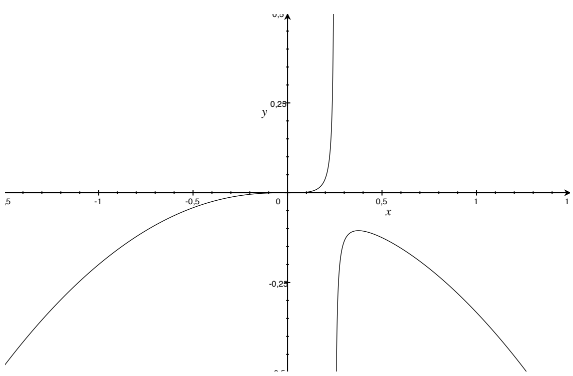
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(1-4x) - x^3(-4)}{(1-4x)^2} = \frac{3x^2 - 8x^3}{(1-4x)^2} = \frac{x^2(3-8x)}{(1-4x)^2}.$$

La derivata prima si annulla se $x^2 = 0$ oppure $3 - 8x = 0$ cioè se $x = 0$ oppure $x = 3/8$. Tolti questi punti, il numeratore è positivo quando $3 - 8x > 0$ cioè se e solo se $x < 3/8$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1/4[\cup]1/4, 3/8[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3/8, \\ < 0, & \text{se } x \in]3/8, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 1/4[$ e in $]1/4, 3/8[$, mentre è decrescente in $]3/8, +\infty[$. In $x = 3/8$ ammette un massimo relativo, in $x = 0$ un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(6x - 24x^2)(1-4x)^2 - (3x^2 - 8x^3)2(1-4x)(-4)}{(1-4x)^4} \\ &= \frac{(6x - 24x^2)(1-4x) + (3x^2 - 8x^3)8}{(1-4x)^3} = \frac{2x(16x^2 - 12x + 3)}{(1-4x)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $16x^2 - 12x + 3$ è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \geq 0$, il denominatore se $x < 1/4$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1/4, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in]0, 1/4[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]1/4, +\infty[$, mentre è convessa in $]0, 1/4[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = -\frac{5}{\mathrm{e}+5t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-\frac{5}{\mathrm{e}+5t} = \frac{t^8 + 3t\cos(2t)}{4^{2-\ln(\mathrm{e}+5t)}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $-5/\mathrm{e} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$4^y\,dy = \big(t^8 + 3t\cos(2t)\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 4^y\,dy = \int \big(t^8 + 3t\cos(2t)\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{4^y}{\ln 4} = \frac{t^9}{9} + 3\int t\cos(2t)\,dt.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int t\cos(2t)\,dt = t\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} - \int \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\,dt = \frac{t}{2}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{4^y}{\ln 4} = \frac{t^9}{9} + \frac{3}{2}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_4\left(\Big(\frac{t^9}{9} + \frac{3}{2}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) + c\Big)\ln 4\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{4}{\ln 4} = \frac{3}{4} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{4}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_4\left(\Big(\frac{t^9}{9} + \frac{3}{2}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) - \frac{3}{4}\Big)\ln 4 + 4\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y 4^z\,dz = \int_0^t \big(s^8 + 3s\cos(2s)\big)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{4^z}{\ln 4}\right]_1^y = \left[\frac{s^9}{9} + \frac{3}{2}s\operatorname{sen}(2s) + \frac{3}{4}\cos(2s)\right]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{4^y}{\ln 4} - \frac{4}{\ln 4} = \frac{t^9}{9} + \frac{3}{2}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) - \frac{3}{4}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{7x^2 - x^3 5^x}{x^3} - \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}\Big)\,dx = 7\int \frac{1}{x}\,dx - \int 5^x\,dx - 2\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = 7\ln|x| - \frac{5^x}{\ln 5} + 2\operatorname{cotg} x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\int_0^{\pi/2} (1-4x)\operatorname{sen}(3x)\,dx = \Big[(1-4x)\frac{-\cos(3x)}{3}\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (-4)\frac{\cos(3x)}{3}\,dx$$
$$= \frac{1}{3} - \Big[\frac{4}{9}\operatorname{sen}(3x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}.$$