Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 02/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B 1
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = (3y' - yt^3)\ln t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{7x - 1 - 8x^2}{2 - \pi}$ rappresenta

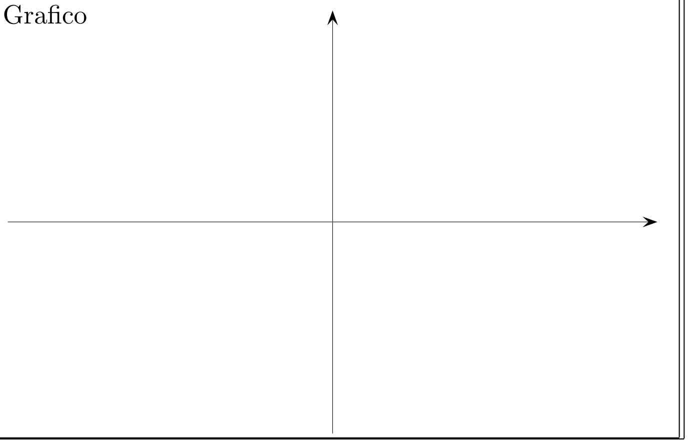
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{\mathbf{6}}$ L'integrale definito di una funzione positiva f su $[a,b]$ rappresenta:

$\boxed{\mathbf{7}}$ Enunciare il teorema dei punti critici

$\boxed{\mathbf{8}}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{-x^3}{5x-1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t\cos(5t) + 3t^4}{3^y} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 2 + \ln(2t + \mathrm{e})$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

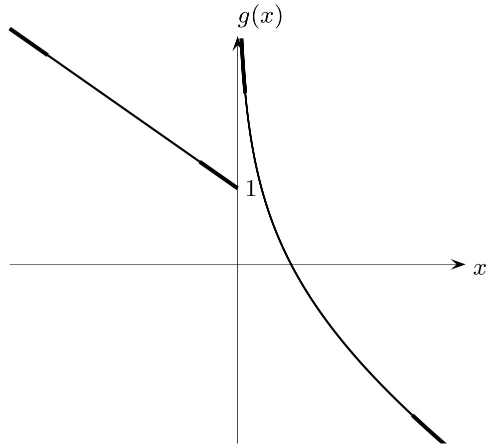
$\boxed{\mathbf{11}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{2}{x^2+1} + \frac{x^5 5^x - 3}{5^x} \right) dx, \qquad \int_0^{\pi/2} (3x+1)\,\mathrm{sen}(3x)\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 2 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ B; $\boxed{\mathbf{4}}$ B; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $5x-1 \neq 0$ cioè $x \neq 1/5$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/5\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se $-x^3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq 0$, il denominatore è positivo se $x > 1/5$. La funzione è dunque positiva per $0 < x < 1/5$, negativa per $x < 0$ oppure $x > 1/5$, e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/5$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{5-1/x} = \left[\frac{-\infty}{5}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to(1/5)^\pm} g(x) = \left[\frac{-1/125}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

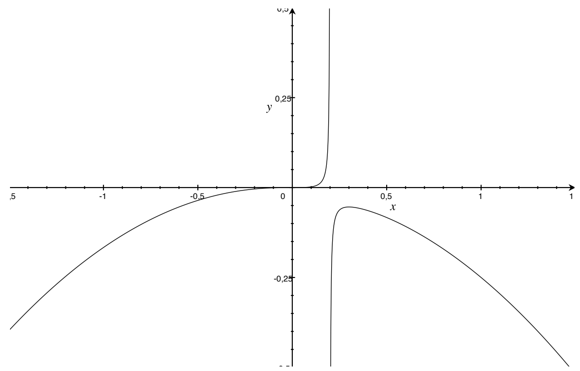
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-3x^2(5x-1)+x^3 5}{(5x-1)^2} = \frac{3x^2-10x^3}{(5x-1)^2} = \frac{x^2(3-10x)}{(5x-1)^2}.$$

La derivata prima si annulla se $x^2 = 0$ oppure $3-10x = 0$ cioè se $x = 0$ oppure $x = 3/10$. Tolti questi punti, il numeratore è positivo quando $3-10x > 0$ cioè se e solo se $x < 3/10$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1/5[\cup]1/5, 3/10[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3/10, \\ < 0, & \text{se } x \in]3/10, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 1/5[$ e in $]1/5, 3/10[$, mentre è decrescente in $]3/10, +\infty[$. In $x = 3/10$ ammette un massimo relativo, in $x = 0$ un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(6x-30x^2)(5x-1)^2-(3x^2-10x^3)2(5x-1)5}{(5x-1)^4} \\ &= \frac{(6x-30x^2)(5x-1)-(3x^2-10x^3)10}{(5x-1)^3} = \frac{-2x(25x^2-15x+3)}{(5x-1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $25x^2 - 15x + 3$ è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \leq 0$, il denominatore se $x > 1/5$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1/5, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in]0, 1/5[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]1/5, +\infty[$, mentre è convessa in $]0, 1/5[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

$\boxed{10}$ a) Si ha $y'(t) = \frac{2}{2t+\mathrm{e}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{2}{2t + \mathrm{e}} = \frac{2t\cos(5t) + 3t^4}{3^{2+\ln(2t+\mathrm{e})}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $2/\mathrm{e} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 3$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$3^y\, dy = \big(2t\cos(5t) + 3t^4\big)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 3^y\, dy = \int \big(2t\cos(5t) + 3t^4\big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3^y}{\ln 3} = 2\int t\cos(5t)\, dt + 3\frac{t^5}{5}.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int t\cos(5t)\, dt = t\frac{\operatorname{sen}(5t)}{5} - \int \frac{\operatorname{sen}(5t)}{5}\, dt = \frac{t}{5}\operatorname{sen}(5t) + \frac{1}{25}\cos(5t) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{3^y}{\ln 3} = \frac{2}{5}t\operatorname{sen}(5t) + \frac{2}{25}\cos(5t) + \frac{3}{5}t^5 + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_3\left(\Big(\frac{2}{5}t\operatorname{sen}(5t) + \frac{2}{25}\cos(5t) + \frac{3}{5}t^5 + c\Big)\ln 3\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 3$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{27}{\ln 3} = \frac{2}{25} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{27}{\ln 3} - \frac{2}{25}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_3\left(\Big(\frac{2}{5}t\operatorname{sen}(5t) + \frac{2}{25}\cos(5t) + \frac{3}{5}t^5 - \frac{2}{25}\Big)\ln 3 + 27\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_3^y 3^z\, dz = \int_0^t \big(2s\cos(5s) + 3s^4\big)\, ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{3^z}{\ln 3}\right]_3^y = \left[\frac{2}{5}s\operatorname{sen}(5s) + \frac{2}{25}\cos(5s) + \frac{3}{5}s^5\right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{3^y}{\ln 3} - \frac{27}{\ln 3} = \frac{2}{5}t\operatorname{sen}(5t) + \frac{2}{25}\cos(5t) + \frac{3}{5}t^5 - \frac{2}{25} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{11}$ Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{2}{x^2+1} + \frac{x^5 5^x - 3}{5^x}\Big)\, dx = 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int x^5\, dx - 3\int 5^{-x}\, dx = 2\operatorname{arctg} x + \frac{x^6}{6} + 3\frac{5^{-x}}{\ln 5} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (3x+1)\operatorname{sen}(3x)\, dx &= \Big[(3x+1)\frac{-\cos(3x)}{3}\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 3\frac{\cos(3x)}{3}\, dx \\ &= \frac{1}{3} + \Big[\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0. \end{aligned}$$