Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 02/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x) < 0$ in $]a,b[$, allora

A f è decrescente in $]a,b[$

B f è crescente in $]a,b[$

C f è convessa in $]a,b[$

D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = y' \operatorname{sen} t - t^2 y^3$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \pi e^2$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

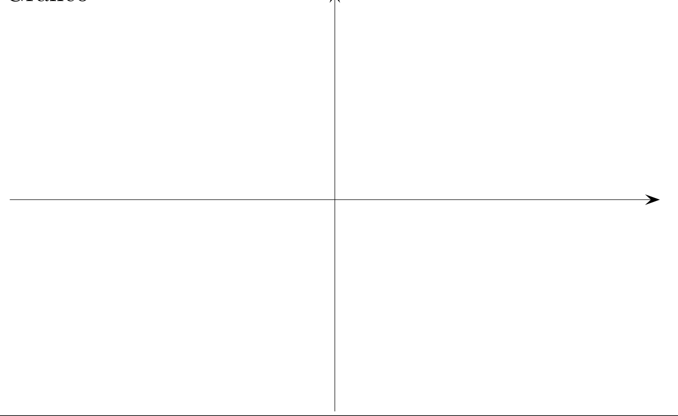
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



$\boxed{\textbf{6}}$ Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a,b[$ è:

$\boxed{\textbf{7}}$ Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

$\boxed{\textbf{8}}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

$\boxed{\textbf{9}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{3x+1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

$\boxed{\textbf{10}}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3t\,\mathrm{sen}(2t) - t^7}{2^y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 3\ln(2t + \mathrm{e}) - 1$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

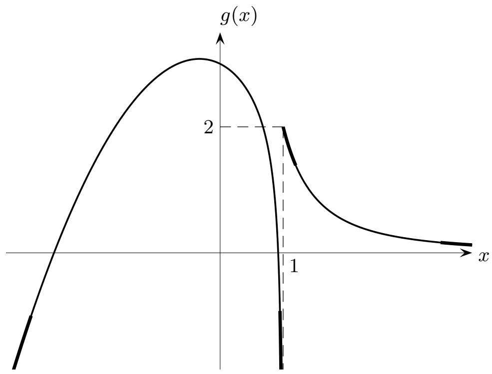
$\boxed{\textbf{11}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2 + 3^x\sqrt{x}}{3^x} + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx, \qquad \int_0^\pi (5 - 2x)\cos(5x)\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 2 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ C; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ A; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $3x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se $x^3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x > -1/3$. La funzione è dunque positiva per $x < -1/3$ oppure $x > 0$, negativa per $-1/3 < x < 0$, e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/3$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3+1/x} = \left[\frac{+\infty}{3}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to(-1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{-1/27}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

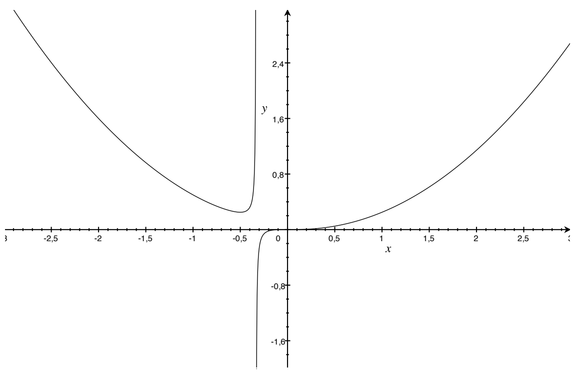
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(3x+1) - x^3 3}{(3x+1)^2} = \frac{6x^3+3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2(2x+1)}{(3x+1)^2}.$$

La derivata prima si annulla se $x^2 = 0$ oppure $2x+1 = 0$ cioè se $x = 0$ oppure $x = -1/2$. Tolti questi punti, il numeratore è positivo quando $2x+1 > 0$ cioè se e solo se $x > -1/2$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/2[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = -1/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1/2, -1/3[\cup]-1/3, 0[\cup]0, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -1/2[$, mentre è crescente in $]-1/2, -1/3[$ e in $]-1/3, +\infty[$. In $x = -1/2$ ammette un minimo relativo, in $x = 0$ un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(18x^2+6x)(3x+1)^2 - (6x^3+3x^2)2(3x+1)3}{(3x+1)^4} \\ &= \frac{(18x^2+6x)(3x+1) - (6x^3+3x^2)6}{(3x+1)^3} = \frac{6x(3x^2+3x+1)}{(3x+1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $3x^2+3x+1$ è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \geq 0$, il denominatore se $x > -1/3$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/3[\cup]0, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/3, 0[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty, -1/3[$ e in $]0, +\infty[$, mentre è concava in $]-1/3, 0[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{6}{2t+\mathrm{e}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{6}{2t+\mathrm{e}} = \frac{3t\,\mathrm{sen}(2t) - t^7}{2^{3\ln(2t+\mathrm{e})-1}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $6/\mathrm{e} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 2$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$2^y\,dy = \big(3t\,\mathrm{sen}(2t) - t^7\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 2^y\,dy = \int \big(3t\,\mathrm{sen}(2t) - t^7\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2^y}{\ln 2} = 3\int t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt - \frac{t^8}{8}.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt = t\frac{-\cos(2t)}{2} + \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = -\frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2t) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{2^y}{\ln 2} = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\mathrm{sen}(2t) - \frac{t^8}{8} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_2\left(\left(-\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\mathrm{sen}(2t) - \frac{t^8}{8} + c\right)\ln 2\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 2$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha $\frac{4}{\ln 2} = c$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_2\left(\left(-\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\mathrm{sen}(2t) - \frac{t^8}{8}\right)\ln 2 + 2\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_2^y 2^z\,dz = \int_0^t \big(3s\,\mathrm{sen}(2s) - s^7\big)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{2^z}{\ln 2}\right]_2^y = \left[-\frac{3}{2}s\cos(2s) + \frac{3}{4}\mathrm{sen}(2s) - \frac{s^8}{8}\right]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{2^y}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 2} = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\mathrm{sen}(2t) - \frac{t^8}{8}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{2+3^x\sqrt{x}}{3^x} + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = 2\int 3^{-x}\,dx + \int \sqrt{x}\,dx + 7\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\frac{3^{-x}}{\ln 3} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + 7\arcsen x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\int_0^\pi (5-2x)\cos(5x)\,dx = \left[(5-2x)\frac{\mathrm{sen}(5x)}{5}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-2)\frac{\mathrm{sen}(5x)}{5}\,dx$$
$$= 0 + \left[-\frac{2}{25}\cos(5x)\right]_0^\pi = \frac{4}{25}.$$