Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 02/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

$\boxed{1}$ Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- $\boxed{A}$ $-\infty$
- $\boxed{B}$ $+\infty$
- $\boxed{C}$ 0
- $\boxed{D}$ non ci sono elementi sufficienti per rispondere

$\boxed{2}$ Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

- $\boxed{A}$ f è decrescente in $]a, b[$
- $\boxed{B}$ f è crescente in $]a, b[$
- $\boxed{C}$ f è convessa in $]a, b[$
- $\boxed{D}$ f è concava in $]a, b[$

$\boxed{3}$ L'equazione differenziale $y' = e^t t^2 + y \ln t$ è

- $\boxed{A}$ un'equazione lineare del primo ordine
- $\boxed{B}$ un'equazione lineare del secondo ordine
- $\boxed{C}$ un'equazione non lineare del primo ordine
- $\boxed{D}$ un'equazione non lineare del secondo ordine

$\boxed{4}$ Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{3x^2 + 5}$ rappresenta

- $\boxed{A}$ una retta
- $\boxed{B}$ una parabola
- $\boxed{C}$ un'iperbole
- $\boxed{D}$ nessuna delle precedenti

$\boxed{5}$ Per la funzione $f(x) = \log_{2/9} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico

6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{2x-1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t^2 - t\cos(3t)}{5^y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 1 + \ln(3t+1)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

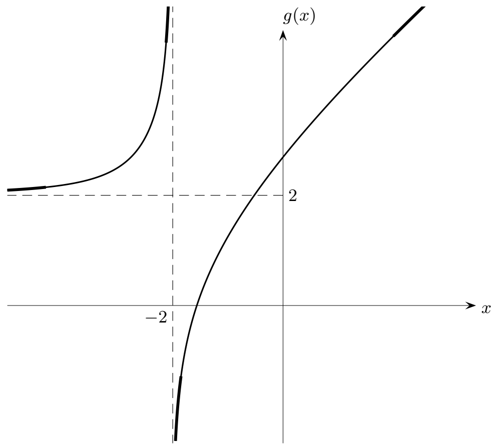
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{x^2 2^x - 3x}{x^2}\Big)\,dx, \qquad \int_0^{\pi} (2x-3)\,\mathrm{sen}(2x)\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 2 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ A; $\boxed{\mathbf{3}}$ A; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $2x-1 \neq 0$ cioè $x \neq 1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se $x^3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x > 1/2$. La funzione è dunque positiva per $x < 0$ oppure $x > 1/2$, negativa per $0 < x < 1/2$, e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2-1/x} = \left[\frac{+\infty}{2}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to(1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{1/8}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

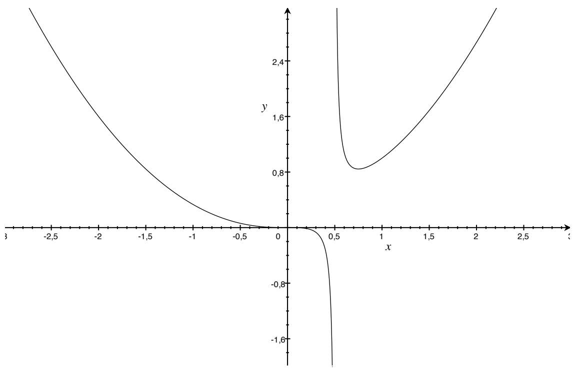
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(2x-1) - x^3 2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2} = \frac{x^2(4x-3)}{(2x-1)^2}.$$

La derivata prima si annulla se $x^2 = 0$ oppure $4x-3 = 0$ cioè se $x = 0$ oppure $x = 3/4$. Tolti questi punti, il numeratore è positivo quando $4x-3 > 0$ cioè se e solo se $x > 3/4$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1/2[\cup]1/2, 3/4[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3/4, \\ > 0, & \text{se } x \in]3/4, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, 1/2[$ e in $]1/2, 3/4[$, mentre è crescente in $]3/4, +\infty[$. In $x = 3/4$ ammette un minimo relativo, in $x = 0$ un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(12x^2-6x)(2x-1)^2 - (4x^3-3x^2)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} \\ &= \frac{(12x^2-6x)(2x-1) - (4x^3-3x^2)4}{(2x-1)^3} = \frac{2x(4x^2-6x+3)}{(2x-1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $4x^2-6x+3$ è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \geq 0$, il denominatore se $x > 1/2$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1/2, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 1/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty, 0[$ e in $]1/2, +\infty[$, mentre è concava in $]0, 1/2[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{3}{3t+1}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{3}{3t+1} = \frac{2t^2 - t\cos(3t)}{5^{1+\ln(3t+1)}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $3 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$5^y \, dy = \big(2t^2 - t\cos(3t)\big)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 5^y \, dy = \int \big(2t^2 - t\cos(3t)\big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{5^y}{\ln 5} = 2\frac{t^3}{3} - \int t\cos(3t)\, dt.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int \big(t\cos(3t)\big)\, dt = t\frac{\operatorname{sen}(3t)}{3} - \int \frac{\operatorname{sen}(3t)}{3}\, dt = \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{9}\cos(3t) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{5^y}{\ln 5} = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_5\left(\Big(\frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + c\Big)\ln 5\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{5}{\ln 5} = -\frac{1}{9} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{9} + \frac{5}{\ln 5}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_5\left(\Big(\frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{9}\Big)\ln 5 + 5\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_1^y 5^z \, dz = \int_0^t \big(2s^2 - s\cos(3s)\big)\, ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{5^z}{\ln 5}\right]_1^y = \left[\frac{2}{3}s^3 - \frac{s}{3}\operatorname{sen}(3s) - \frac{1}{9}\cos(3s)\right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{5^y}{\ln 5} - \frac{5}{\ln 5} = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{x^2 2^x - 3x}{x^2}\Big)\, dx = 5\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int 2^x \, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx = 5\operatorname{tg} x - \frac{2^x}{\ln 2} + 3\ln|x| + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (2x-3)\operatorname{sen}(2x)\, dx &= \left[(2x-3)\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\frac{\cos(2x)}{2}\, dx \\ &= -\frac{2\pi - 3}{2} - \frac{3}{2} + \left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right]_0^\pi = -\pi. \end{aligned}$$