Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Agraria
Corsi di Laurea in VIT e STAL

Esercitazioni di Matematica

3 novembre 2009

$\boxed{1}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{1}{x+1} + 1 < \frac{2}{x-2}$$

$\boxed{2}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\log_{1/3}\left(2 - |x+1|\right) \geq \log_{1/3}(x+2) - 1$$

$\boxed{3}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{8}{4^x} > 2^{\sqrt{6x-x^2}}$$

Soluzioni degli esercizi del 3 novembre 2009

$\boxed{1}$ Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $x+1 \neq 0$ e $x-2 \neq 0$ cioè $x \neq -1, \neq 2$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\frac{1}{x+1} + 1 < \frac{2}{x-2} \iff \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{2}{x-2} < 0 \iff$$

$$\iff \frac{(x-2)+(x+1)(x-2)-2(x+1)}{(x+1)(x-2)} < 0 \iff \frac{x^2-2x-6}{(x+1)(x-2)} < 0.$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore. Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x^2 - 2x - 6 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq 1-\sqrt{7}$ oppure $x \geq 1+\sqrt{7}$. In definitiva il numeratore è positivo se $x < 1-\sqrt{7}$ oppure $x > 1+\sqrt{7}$, negativo se $1-\sqrt{7} < x < 1+\sqrt{7}$ e si annulla se $x = 1-\sqrt{7}$ oppure $x = 1+\sqrt{7}$.

Analogamente si verifica che il denominatore è positivo se $x < -1$ oppure $x > 2$, negativo se $-1 < x < 2$.

La disequazione ha soluzione quando numeratore e denominatore hanno segno discorde, dunque se $1-\sqrt{7} < x < -1$ oppure $2 < x < 1+\sqrt{7}$. L'insieme delle soluzioni è quindi

$$S =]1-\sqrt{7}, -1[\cup]2, 1+\sqrt{7}[$$

2 Innanzitutto affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere

$$\begin{cases} 2-|x+1|>0 \\ x+2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2>|1+x| \\ x>-2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2>1+x>-2 \\ x>-2 \end{cases}$$

quindi $-2 < x < 1$. Osservato che $-1 = \log_{1/3} 3$, utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene che la disequazione è equivalente a

$$\log_{1/3}\big(2-|x+1|\big) \geq \log_{1/3}(x+2) + \log_{1/3} 3 \quad \iff \quad \log_{1/3}\big(2-|x+1|\big) \geq \log_{1/3}(3x+6)$$

Poiché la funzione logaritmica in base 1/3 è decrescente, quest'ultima equivale a

$$2-|x+1| \leq 3x+6$$

Distinguiamo due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo oppure negativo. Perciò la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-(x+1) \leq 3x+6, \end{cases} \cup \begin{cases} x+1<0 \\ 2+(x+1) \leq 3x+6. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni gli $x \geq -1$, il secondo $-3/2 \leq x < -1$. Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S = [-3/2, 1[$$

3 Innanzitutto affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, ovvero $6x - x^2 \geq 0$ cioè $0 \leq x \leq 6$. Poiché $8 = 2^3$ e $4^x = 2^{2x}$, per le proprietà della funzione esponenziale la disequazione può essere scritta nella forma

$$2^{3-2x} > 2^{\sqrt{6x-x^2}}$$

e utilizzando la proprietà di crescenza della funzione esponenziale di base 2 si ottiene equivalentemente

$$3-2x > \sqrt{6x-x^2}.$$

Affinché questa disequazione possa avere soluzioni, deve essere $3-2x > 0$. A questo punto si può elevare al quadrato ambo i membri, perciò la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 3-2x>0 \\ (3-2x)^2 > 6x-x^2 \\ 0 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

La disequazione di secondo grado ha come soluzioni $x < 3/5$ oppure $x > 3$, quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione data è

$$S = [0, 3/5[$$

Esercitazioni del 24 novembre 2009

$\boxed{1}$ Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-7x^7+3}{2x^7+3-2x^5},\qquad \textbf{b)}\ \lim_{y\to+\infty}\frac{5y^5+y^3-2}{1+y+3y^9},\qquad \textbf{c)}\ \lim_{t\to-\infty}\frac{2t^5-5t-10}{3t^2+t^3+2}.$$

Sapendo inoltre che $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ per ogni $\alpha > 0$ si calcolino, qualora possibile, i seguenti limiti

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5/3}-3x^\pi+3}{2x^{9/5}+5x^2-2},\qquad \textbf{e)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{5/3}-3x^\pi+3}{2x^{9/5}+5x^2-2}.$$

$\boxed{2}$ Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

$$\textbf{f)}\ \lim_{z\to-1}\frac{3z^2-z-1}{z^2-2z-3},\qquad \textbf{g)}\ \lim_{x\to0}\frac{\cos(\pi-5x)}{x\ln(1-x^2+2x)}.$$

$\boxed{3}$ Sapendo che

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}+\infty & \text{se } a>1\\ 0 & \text{se } 0<a<1,\end{cases}$$

calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-5^x+4}{\mathrm{e}^x+3^x-2}.$$

$\boxed{4}$ Risolvere la seguente disequazione

$$\log_2(1-x)\le 5-\frac{3}{\log_4(1-x)}.$$

Soluzioni degli esercizi del 24 novembre 2009

$\boxed{1}$ a) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-7x^7+3}{2x^7+3-2x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5/x^4-7+3/x^7}{2+3/x^7-2/x^3}=\left[\frac{0-7+0}{2+0-0}\right]=-\frac{7}{2}.$$

b) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{5y^5+y^3-2}{1+y+3y^9}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^5(5+1/y^2-2/y^5)}{y^9(1/y^9+1/y^8+3)}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^4}\cdot\frac{5+1/y^2-2/y^5}{1/y^9+1/y^8+3}\right)$$
$$=\left[0\cdot\frac{5+0-0}{0+0+3}\right]=0.$$

c) È un limite di una funzione razionale all'infinito:

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{2t^5-5t-10}{3t^2+t^3+2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t^5(2-5/t^4-10/t^5)}{t^3(3/t+1+2/t^3)}=\lim_{t\to-\infty}\left(t^2\cdot\frac{2-5/t^4-10/t^5}{3/t+1+2/t^3}\right)$$
$$=\left[+\infty\cdot\frac{2-0-0}{0+1+0}\right]=+\infty.$$

d) Si procede analogamente al caso delle funzioni razionali. Poiché $\pi - 5/3 > 0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/3} - 3x^\pi + 3}{2x^{9/5} + 5x^2 - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\pi(2/x^{\pi-5/3} - 3 + 3/x^\pi)}{x^2(1/x^{1/5} + 5 - 2/x^2)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x^{\pi-2} \cdot \frac{2/x^{\pi-5/3} - 3 + 3/x^\pi}{1/x^{1/5} + 5 - 2/x^2} \right) = \left[+\infty \cdot \frac{0-3+0}{0+5+0} \right] = -\infty.$$

e) Poiché le potenze reali ad esponente reale sono definite solamente quando la base è maggiore di zero, il dominio della funzione in considerazione non è inferiormente illimitato perciò non ha senso calcolare il limite richiesto.

2 f) Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{3}{0}]$. Studiamo quindi il segno della funzione in un intorno di $z_0 = -1$. Il numeratore tende a 3 e quindi è positivo per gli z vicini a -1. Poiché $z^2 - 2z - 3$ è positivo per gli $z < -1$ e per gli $z > 3$ si ottiene che la funzione è positiva per gli $z < -1$ e negativa per gli $z > -1$ e vicini a -1, quindi

$$\lim_{z\to-1^-} \frac{3z^2 - z - 1}{z^2 - 2z - 3} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty, \qquad \lim_{z\to-1^+} \frac{3z^2 - z - 1}{z^2 - 2z - 3} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty,$$

quindi il limite cercato non esiste.

g) Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{-1}{0}]$. Studiamo il segno della funzione in un intorno di $x_0 = 0$. Il numeratore tende a -1, quindi è negativo per gli x vicini a 0. Studiamo il segno del denominatore: si ha $\ln(1-x^2+2x) > 0$ se e solo se $1-x^2+2x > 1$ cioè $x^2-2x < 0$ ovvero $0 < x < 2$. Si ha dunque che $x\ln(1 - x^2 + 2x)$ è sempre positivo nelle vicinanze di $x_0 = 0$, perciò

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos(\pi - 5x)}{x\ln(1 - x^2 + 2x)} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty.$$

3 Portando 5^x e 3^x a fattore comune, rispettivamente, a numeratore e denominatore, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 5^x + 4}{e^x + 3^x - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x((2/5)^x - 1 + 4/5^x)}{3^x((e/3)^x + 1 - 2/3^x)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left((5/3)^x \cdot \frac{(2/5)^x - 1 + 4/5^x}{(e/3)^x + 1 - 2/3^x} \right) = \left[+\infty \cdot \frac{0-1+0}{0+1-0} \right] = -\infty.$$

4 Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $1 - x > 0$ e $\log_4(1 - x) \neq 0$ cioè $x < 1$ e $1 - x \neq 1$. In definitiva si deve avere $x < 1$ e $x \neq 0$. Utilizzando la formula del cambiamento di base dei logaritmi e osservando che $\log_2 4 = 2$, si ottiene che la disuguaglianza data è equivalente a

$$\log_2(1 - x) \leq 5 - \frac{3}{\frac{\log_2(1-x)}{\log_2 4}} \iff \log_2(1 - x) \leq 5 - \frac{6}{\log_2(1 - x)} \iff$$
$$\iff \frac{\big(\log_2(1 - x)\big)^2 - 5\log_2(1 - x) + 6}{\log_2(1 - x)} \leq 0.$$

Operando la sostituzione $z = \log_2(1 - x)$ si ottiene la disequazione fratta

$$\frac{z^2 - 5z + 6}{z} \leq 0. \tag{1}$$

Il numeratore è positivo per $z \leq 2$ oppure $z \geq 3$, mentre il denominatore è positivo se $z > 0$, quindi (1) è verificata se $z < 0$ oppure $2 \leq z \leq 3$. Tornando alla variabile x otteniamo

$$\log_2(1-x) < 0 \quad \text{oppure} \quad 2 \leq \log_2(1-x) \leq 3$$

ovvero

$$1 - x < 1 \quad \text{oppure} \quad 4 \leq 1 - x \leq 8$$

cioè

$$x > 0 \quad \text{oppure} \quad -7 \leq x \leq -3.$$

Ricordandoci anche delle condizioni di esistenza si ottiene che l'insieme delle soluzioni è

$$S = [-7, -3] \cup]0, 1[$$

Esercitazioni del 15 dicembre 2009

$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{3x^2 - 5x + 1}, \qquad f_2(x) = (1 + x \operatorname{sen} x)^3 + \frac{\sqrt{x} - \mathrm{e}^x}{\log_3 x}, \qquad f_3(x) = \operatorname{arctg}(x^2 \cos x).$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Risolvere i seguenti limiti, dopo aver verificato che valgono le ipotesi del Teorema di de l'Hôpital

$$\textbf{a)} \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{sen} x + 3x^2}{x \cos x + 3^x - (1+2x)^2} \qquad \textbf{b)} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x) + 3x^2 - \operatorname{sen}(3x + x^2)}{\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - x \cos x - 5x^2}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2}$$

a) determinare il dominio;
b) studiare il segno di g;
c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$,
f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;
g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

Soluzioni degli esercizi del 15 dicembre 2009

$\boxed{1}$ Utilizzando la regola di derivazione del quoziente:

$$f_1'(x) = \frac{(4x+1)(3x^2-5x+1)-(2x^2+x-2)(6x-5)}{(3x^2-5x+1)^2} = \frac{-13x^2+16x-9}{(3x^2-5x+1)^2}.$$

Utilizzando la regola di derivazione del prodotto del quoziente e della funzione composta si ottiene:

$$f_2'(x) = 3(1+x\operatorname{sen}x)^2(\operatorname{sen}x + x\cos x) + \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\mathrm{e}^x)\log_3 x - (\sqrt{x}-\mathrm{e}^x)\frac{\log_3 \mathrm{e}}{x}}{(\log_3 x)^2}.$$

Utilizzando la regola di derivazione del prodotto e della funzione composta si ottiene infine:

$$f_3'(x) = \frac{1}{1+\big(x^2\cos x\big)^2}(2x\cos x - x^2\operatorname{sen}x).$$

$\boxed{2}$ a) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione [0/0]. Applicando de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}x - 5\operatorname{sen}x + 3x^2}{x\cos x + 3^x - (1+2x)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos^2 x} - 5\cos x + 6x}{\cos x - x\operatorname{sen}x + 3^x\ln 3 - 4(1+2x)} = \frac{3}{3-\ln 3}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato vale allora $\frac{3}{3-\ln 3}$.

b) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione [0/0]. Applicando de l'Hôpital due volte consecutivamente si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+3x^2-\operatorname{sen}(3x+x^2)}{\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x - x\cos x - 5x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}+6x-\cos(3x+x^2)(3+2x)}{\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x + \mathrm{e}^x\cos x - \cos x + x\operatorname{sen}x - 10x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{(1+3x)^2}+6+\operatorname{sen}(3x+x^2)(3+2x)^2-2\cos(3x+x^2)}{2\mathrm{e}^x\cos x + 2\operatorname{sen}x + x\cos x - 10} = \frac{-9+6+0-2}{2+0+0-10} = \frac{5}{8}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato è $\frac{5}{8}$.

$\boxed{3}$ a) Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui $x-2 \neq 0$, ovvero $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$. La funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se e solo se $2x^2-1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/\sqrt{2}$ oppure $x \geq 1/\sqrt{2}$. Il denominatore è positivo se $x > 2$. Allora

$$g(x) = \begin{cases} <0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/\sqrt{2}[\cup]1/\sqrt{2}, 2[, \\ =0, & \text{se } x = -1/\sqrt{2} \text{ oppure } x = 1/\sqrt{2}, \\ >0, & \text{se } x \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[\cup]2, +\infty[. \end{cases}$$

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 2 e a $\pm\infty$. Utilizzando anche il punto b) si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x\,\frac{2-1/x^2}{1-2/x}\right) = [\pm\infty\cdot 2] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 2^\pm} g(x) = \left[\frac{7}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{4x(x-2)-(2x^2-1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+1}{(x-2)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo nel dominio, la derivata prima è positiva se e solo se $2x^2 - 8x + 1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq 2 - \frac{\sqrt{14}}{2}$ oppure $x \geq 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}$. Più precisamente

$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 2 - \frac{\sqrt{14}}{2}[\cup]2 + \frac{\sqrt{14}}{2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 2 - \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ oppure } x = 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]2 - \frac{\sqrt{14}}{2}, 2[\cup]2, 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente in $]-\infty, 2-\frac{\sqrt{14}}{2}[$ e in $]2+\frac{\sqrt{14}}{2}, +\infty[$, decrescente in $]2-\frac{\sqrt{14}}{2}, 2[$ e in $]2, 2+\frac{\sqrt{14}}{2}[$. I punti $x = 2 + \frac{\sqrt{14}}{2}$ e $x = 2 - \frac{\sqrt{14}}{2}$ sono rispettivamente punti di minimo e massimo relativo.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = -1/3$ e $g'(-1) = 11/9$, l'equazione della retta cercata è

$$y = (x+1)\frac{11}{9} - \frac{1}{3} \qquad \text{cioè} \qquad y = \frac{11}{9}x + \frac{8}{9}.$$

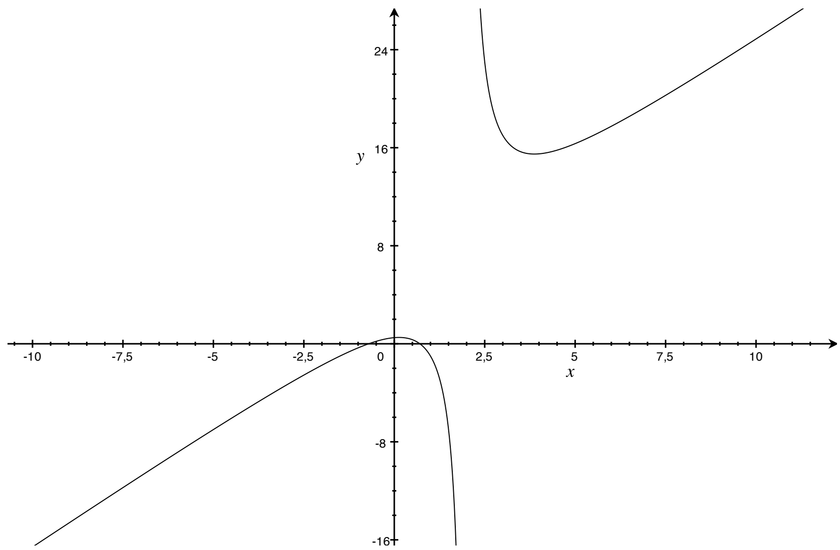
f) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{(4x-8)(x-2)^2 - (2x^2-8x+1)2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4} = \frac{(4x-8)(x-2) - 2(2x^2-8x+1)}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{14}{(x-2)^3}.$$

Si ha che $g''(x) > 0$ se e solo se $(x-2)^3 > 0$ ovvero se $x > 2$, quindi

$$g''(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]2, +\infty[, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 2[. \end{cases}$$

La funzione è dunque convessa in $]2, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, 2[$.



Esercitazioni del 22 dicembre 2009

$\boxed{1}$ Data la funzione

$$g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-3x}$$

a) determinare il dominio;
b) studiare il segno di g;
c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;
e) studiare gli eventuali asintoti di g;
f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;
g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

$\boxed{2}$ Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$\boxed{3}$ Per l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2t+1}{y^2}$$

verificare se le seguenti funzioni sono soluzioni in $\mathbb{R}^+$:

$$\textbf{a)}\ \ y_1(t) = t^2+3, \qquad \textbf{b)}\ \ y_2(t) = \sqrt[3]{3t^2+3t+1},$$

$\boxed{4}$ Verificare che la funzione $y(t) = (t-1)\mathrm{e}^t$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' - 5y + (8t-6)\mathrm{e}^t = 0.$$

Di quale tipo di equazione si tratta?

Soluzioni degli esercizi del 22 dicembre 2009

$\boxed{1}$ a) Il dominio è dato banalmente da $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. La funzione è ivi continua e derivabile in quanto composizione e prodotto di funzioni continue e derivabili.

b) Poiché e^{-3x} è strettamente positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione è positiva se $x > -1/2$, negativa se $x < -1/2$ e si annulla in $x = -1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x+1)\mathrm{e}^{-3x} = \big[-\infty \cdot +\infty\big] = -\infty,$$

mentre, ricordando ad esempio il limite fondamentale

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{z^n}{a^z} = 0, \quad \text{per ogni } a > 1,\ n \geq 1,$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{e^{3x}} = 0.$$

Il medesimo risultato si poteva ottenere anche mediante il teorema di de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{e^{3x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3e^{3x}} = \left[\frac{2}{+\infty}\right] = 0.$$

Dallo studio dei limiti si ricava in particolare che la funzione non ammette minimo.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = 2e^{-3x} + (2x+1)e^{-3x}(-3) = -(6x+1)e^{-3x}.$$

La derivata prima è dunque ≥ 0 se e solo se $6x+1 \leq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/6$. Quindi

$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/6[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/6, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente in $]-\infty, -1/6[$, decrescente in $]-1/6, +\infty[$. Il punto $x = -1/6$ è di massimo relativo.

e) Essendo $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ allora la retta $y = 0$ è asintoto (orizzontale) a $+\infty$. Poiché invece

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \big(2 + \frac{1}{x}\big)e^{-3x} = [2 \cdot +\infty] = +\infty,$$

la funzione non ammette asintoti a $-\infty$.

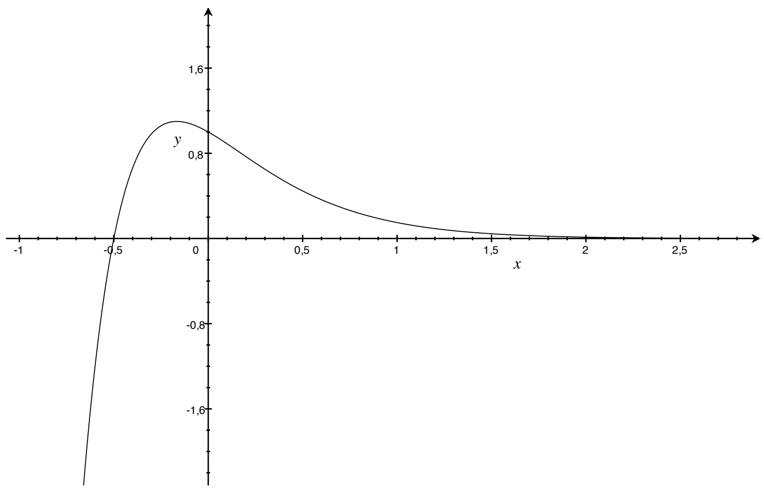
f) La derivata seconda è

$$g''(x) = -6e^{-3x} - (6x+1)e^{-3x}(-3) = (18x-3)e^{-3x}.$$

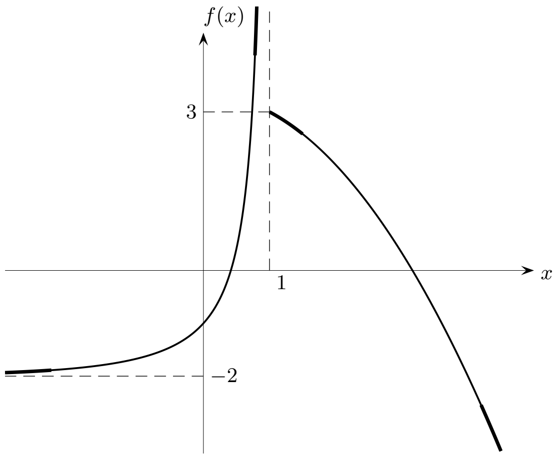
Si ha che $g''(x) \geq 0$ se e solo se $18x - 3 \geq 0$ ovvero se $x \geq 1/6$, quindi

$$g''(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1/6, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1/6[. \end{cases}$$

La funzione è dunque convessa in $]1/6, +\infty[$ mentre è concava in $]-\infty, 1/6[$.



$\boxed{\mathbf{2}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{3}}$ a) La funzione $y_1(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}^+$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_1'(t) = \frac{2t+1}{y_1^2(t)}$ per ogni $t > 0$. Essendo

$$y_1'(t) = 2t,$$

$$\frac{2t+1}{y_1^2(t)} = \frac{2t+1}{(t^2+3)^2}.$$

si osserva che, ad esempio per $t = 0$,

$$0 = y_1'(0) \neq \frac{2 \cdot 0 + 1}{y_1^2(0)} = \frac{1}{9},$$

quindi y_1 non è soluzione dell'equazione.

b) La funzione $y_2(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}^+$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_2'(t) = \frac{2t+1}{y_2^2(t)}$ per ogni $t > 0$. Si ha

$$y_2'(t) = \left((3t^2+3t+1)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(3t^2+3t+1)^{-2/3}(6t+3) = \frac{2t+1}{(\sqrt[3]{3t^2+3t+1})^2},$$

$$\frac{2t+1}{y_2^2(t)} = \frac{2t+1}{(\sqrt[3]{3t^2+3t+1})^2}.$$

In conclusione si ha che $y_2'(t) = \frac{2t+1}{y_2^2(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, dunque y_2 è soluzione.

$\boxed{\mathbf{4}}$ a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 2. Derivando si ottiene

$$y'(t) = \mathrm{e}^t + (t-1)\mathrm{e}^t = t\mathrm{e}^t, \qquad y''(t) = \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t = (t+1)\mathrm{e}^t,$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 4y'(t) - 5y(t) + (8t-6)\mathrm{e}^t = (t+1)\mathrm{e}^t - 4t\mathrm{e}^t - 5(t-1)\mathrm{e}^t + (8t-6)\mathrm{e}^t = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque y è soluzione.

Esercitazioni del 12 gennaio 2010

$\boxed{1}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int (5 - 2x^5 - 4x^9)\, dx, \qquad \int \left(4^x + \frac{5}{\cos^2 x} - 5 \operatorname{sen} x\right) dx, \qquad \int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad \int \frac{\ln^3 x}{x}\, dx, \qquad \int \frac{3x-1}{x^2+1}\, dx.$$

$\boxed{2}$ Dato l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2t + 3\cos t}{y^6}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 3t + 1$ è soluzione dell'equazione in $]0, +\infty[$;

b) determinare la generica soluzione del problema, ad esempio col metodo di separazione delle variabili;

c) tra tutte le soluzioni determinare quella per cui $y(0) = 1$.

$\boxed{3}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3t^2 y - t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \frac{1}{3}$ è soluzione del problema;

b) determinare la soluzione del problema, qualora non lo sia la funzione di cui al punto a).

Soluzioni degli esercizi del 12 gennaio 2010

$\boxed{1}$ Per la proprietà di linearità e consultando la prima tabella si ottiene

$$\int (5 - 2x^5 - 4x^9)\, dx = \int 5\, dx - 2\int x^5\, dx - 4\int x^9\, dx = 5x - 2\frac{x^6}{6} - 4\frac{x^{10}}{10} + c,$$

$$\begin{aligned} \int \left(4^x + \frac{5}{\cos^2 x} - 5 \operatorname{sen} x\right) dx &= \int 4^x\, dx + 5\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - 5\int \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 5 \operatorname{tg} x + 5\cos x + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx &= \int \left(1 + 2\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx = \int 1\, dx + 2\int x^{-1/2}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx \\ &= x + 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + \ln|x| + c = x + 4\sqrt{x} + \ln|x| + c. \end{aligned}$$

Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}(1-x^2)'\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + c = -\sqrt{1-x^2} + c,$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \int (\ln x)^3 (\ln x)'\,dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + c,$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + c.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ a) Si ha $y'(t) = 3$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3 = \frac{2t + 3\cos t}{(3t+1)^6}$$

che non è identicamente vera per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $3 \neq \frac{2+3\cos 1}{4^6} < 1$). La funzione non è dunque soluzione.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^6\,dy = (2t + 3\cos t)\,dt$$

e integrando

$$\int y^6\,dy = \int (2t + 3\cos t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^7}{7} = t^2 + 3\operatorname{sen} t + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo quest'ultima equazione nell'incognita y si ottiene

$$y = y(t) = \sqrt[7]{7t^2 + 21\operatorname{sen} t + 7c}$$

che al variare di $c \in \mathbb{R}$ fornisce tutte le soluzioni dell'equazione.

c) Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $1 = \sqrt[7]{7c}$ cioè $c = 1/7$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[7]{7t^2 + 21\operatorname{sen} t + 1}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ a) Si ha $y'(t) = 0$ e sostituendo si ottiene

$$0 = 3t^2\frac{1}{3} - t^2$$

che è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$. La funzione è dunque soluzione della prima equazione. Tuttavia $y(0) \neq 2$ perciò non verifica le condizioni iniziali, quindi non è soluzione del problema di Cauchy.

b) Si ricorda che la soluzione generale dell'equazione lineare

$$y' = a(t)y + b(t)$$

con $a(t), b(t)$ funzioni continue, è

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\,dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.

Nel nostro caso $a(t) = 3t^2$ e una sua primitiva è ad esempio $A(t) = t^3$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = \mathrm{e}^{t^3} \int \mathrm{e}^{-t^3}(-t^2)\,dt = \frac{\mathrm{e}^{t^3}}{3} \int \mathrm{e}^{-t^3}(-3t^2)\,dt.$$

Consultando la tabella 2 degli integrali si vede che

$$\int \mathrm{e}^{f(t)} f'(t)\,dt = \mathrm{e}^{f(t)} + c$$

con c generica costante d'integrazione, perciò

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^3}}{3}\big(\mathrm{e}^{-t^3} + c\big) = \frac{1}{3} + \bar{c}\,\mathrm{e}^{t^3}$$

essendo $\bar{c} = -c/2$ un generico numero reale al pari di c.

c) Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si ottiene l'equazione $2 = 1/3 + \bar{c}$ quindi $\bar{c} = 5/3$ e la soluzione è $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\mathrm{e}^{t^3}$.

Esercitazioni del 19 gennaio 2010

1 Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - 3x - 2)\,dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx, \qquad \int_{1/2}^{2} \frac{x^3 - 2\ln^2 x}{x}\,dx.$$

2 Calcolare i seguenti integrali mediante il metodo di integrazione per parti

$$\int (3x^2 - 4x + 1)\mathrm{e}^{3x}\,dx, \qquad \int x^2 \ln x\,dx, \qquad \int \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen}(2x)\,dx.$$

3 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2y + t \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^3 - \operatorname{sen}(ty)}{t^3 y + 1} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni degli esercizi del 19 gennaio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_{-1}^{2}(x^3-3x-2)\,dx=\Big[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}-2x\Big]_{-1}^{2}=\Big(4-6-4\Big)-\Big(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\Big)=-\frac{27}{4}.$$

Ponendo $f(x)=\cos x$ ed essendo $f'(x)=-\operatorname{sen} x$ si ottiene

$$\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx=-\int(f(x))^{-3}f'(x)\,dx=-\frac{(f(x))^{-2}}{-2}+c=\frac{1}{2\cos^2 x}+c,$$

dunque $\frac{1}{2\cos^2 x}$ è una primitiva della funzione integranda e, sempre per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx=\Big[\frac{1}{2\cos^2 x}\Big]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2\cos^2(\pi/4)}-\frac{1}{2\cos^2 0}=\frac{1}{2}.$$

Alternativamente

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg} x\,(\operatorname{tg} x)'\,dx=\Big[\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{2}\Big]_0^{\pi/4}=\frac{\operatorname{tg}^2(\pi/4)}{2}=\frac{1}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Poiché $H(x)=e^{3x}/3$ è una primitiva della funzione $h(x)=e^{3x}$, mediante il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int(3x^2-4x+1)e^{3x}\,dx&=(3x^2-4x+1)\frac{e^{3x}}{3}-\int(6x-4)\frac{e^{3x}}{3}\,dx\\&=(3x^2-4x+1)\frac{e^{3x}}{3}-\Big((6x-4)\frac{e^{3x}}{9}-\int 6\frac{e^{3x}}{9}\,dx\Big)\\&=(3x^2-4x+1)\frac{e^{3x}}{3}-(6x-4)\frac{e^{3x}}{9}+\frac{2}{9}e^{3x}+c=(x-1)^2e^{3x}+c.\end{aligned}$$

Il secondo integrale

$$\int x^2\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c.$$

Poiché $H(x)=-e^{-x}$ è una primitiva della funzione $h(x)=e^{-x}$, applicando due volte il metodo per parti al terzo integrale si ottiene

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx&=-e^{-x}\operatorname{sen}(2x)-\int(-e^{-x})\cos(2x)\cdot 2\,dx\\&=-e^{-x}\operatorname{sen}(2x)+2\int e^{-x}\cos(2x)\,dx\\&=-e^{-x}\operatorname{sen}(2x)+2\Big(-e^{-x}\cos(2x)-\int(-e^{-x})(-\operatorname{sen}(2x))2\,dx\Big)\\&=-e^{-x}\operatorname{sen}(2x)-2e^{-x}\cos(2x)-4\int e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx.\end{aligned}$$

L'integrale cercato $I:=\int e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$ è quindi soluzione dell'equazione

$$I=-e^{-x}\operatorname{sen}(2x)-2e^{-x}\cos(2x)-4I\quad\Longrightarrow\quad I=-\frac{1}{5}\big(e^{-x}\operatorname{sen}(2x)+2e^{-x}\cos(2x)\big)+c.$$

$\boxed{3}$ Si ricorda che la soluzione generale dell'equazione lineare

$$y' = a(t)y + b(t)$$

con $a(t), b(t)$ funzioni continue, è

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.

Nel nostro caso $a(t) = -2$ e una sua primitiva è ad esempio $A(t) = -2t$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t} \int \mathrm{e}^{2t} t\, dt.$$

Applicando il metodo per parti si calcola

$$\int \mathrm{e}^{2t} t\, dt = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} t - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\, dt = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} + c,$$

con c generica costante d'integrazione, perciò

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t} \left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} t - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} + c \right) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + c\, \mathrm{e}^{-2t}.$$

Imponendo ora la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ottiene l'equazione $1 = -\frac{1}{4} + c$ quindi $c = 5/4$ e la soluzione del problema di Cauchy assegnato è data da $y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{-2t}$.

$\boxed{4}$ Si osserva che la funzione nulla $y(t) \equiv 0$ per ogni t, è soluzione dell'equazione e verifica le condizioni iniziali, dunque è la soluzione cercata.