# Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 02/02/2010
A.A. 2009/2010

| Scritto | | Voto |
|---|---|---|
| Teoria | Esercizi | |

**Istruzioni**: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

| Cognome | Nome |
|---|---|
| Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$ | Matricola |
| Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$ | n. fogli (compreso questo) |

**1** Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C $0$
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

**2** Se $f$ è una funzione derivabile in $]a, b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in ]a, b[$, allora

- A $f$ è decrescente in $]a, b[$
- B $f$ è crescente in $]a, b[$
- C $f$ è convessa in $]a, b[$
- D $f$ è concava in $]a, b[$

**3** L'equazione differenziale $y' = \mathrm{e}^t t^2 + y \ln t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

**4** Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{3x^2+5}$ rappresenta

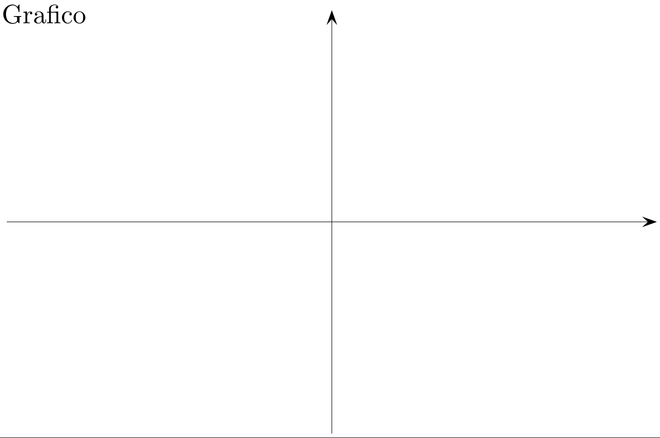
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

**5** Per la funzione $f(x) = \log_{2/9} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



**6** Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in $x_0$ è:

**7** Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

**8** Rappresentare il grafico di una funzione $g$ che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

**9** Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{2x-1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di $g$; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di $g$.

**10** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t^2 - t\cos(3t)}{5^y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 1 + \ln(3t+1)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

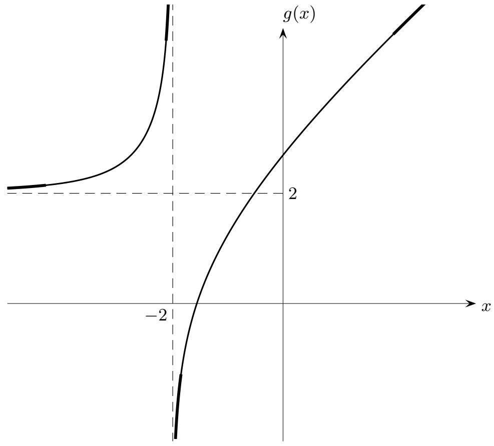
**11** Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{x^2 2^x - 3x}{x^2}\right) dx, \qquad \int_0^\pi (2x-3)\,\mathrm{sen}(2x)\,dx.$$

**IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.**

## Soluzioni dei quesiti dell'esame del 2 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ A; $\boxed{\mathbf{3}}$ A; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:




$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $2x - 1 \neq 0$ cioè $x \neq 1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è $\geq 0$ se $x^3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x > 1/2$. La funzione è dunque positiva per $x < 0$ oppure $x > 1/2$, negativa per $0 < x < 1/2$, e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2 - 1/x} = \left[\frac{+\infty}{2}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to(1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{1/8}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

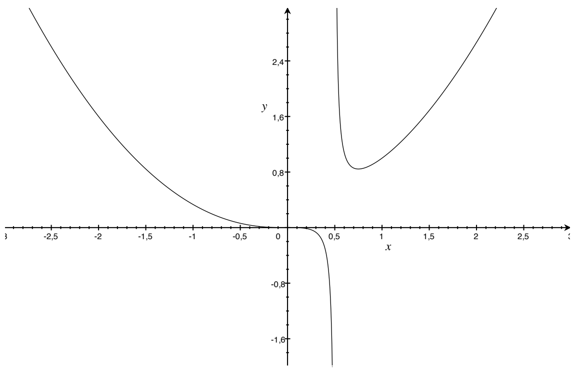
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(2x-1) - x^3 2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2} = \frac{x^2(4x-3)}{(2x-1)^2}.$$

La derivata prima si annulla se $x^2 = 0$ oppure $4x - 3 = 0$ cioè se $x = 0$ oppure $x = 3/4$. Tolti questi punti, il numeratore è positivo quando $4x - 3 > 0$ cioè se e solo se $x > 3/4$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in ]-\infty, 0[\cup]0, 1/2[\cup]1/2, 3/4[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3/4, \\ > 0, & \text{se } x \in ]3/4, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, 1/2[$ e in $]1/2, 3/4[$, mentre è crescente in $]3/4, +\infty[$. In $x = 3/4$ ammette un minimo relativo, in $x = 0$ un punto di flesso a tangente orizzontale.




e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(12x^2 - 6x)(2x-1)^2 - (4x^3 - 3x^2)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} \\ &= \frac{(12x^2 - 6x)(2x-1) - (4x^3 - 3x^2)4}{(2x-1)^3} = \frac{2x(4x^2 - 6x + 3)}{(2x-1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $4x^2-6x+3$ è sempre positivo, il numeratore è $\geq 0$ se e solo se $x \geq 0$, il denominatore se $x > 1/2$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in ]-\infty, 0[\cup]1/2, +\infty[ \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in ]0, 1/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty, 0[$ e in $]1/2, +\infty[$, mentre è concava in $]0, 1/2[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

**10** a) Si ha $y'(t) = \frac{3}{3t+1}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{3}{3t+1} = \frac{2t^2 - t\cos(3t)}{5^{1+\ln(3t+1)}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $3 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$5^y\, dy = \big(2t^2 - t\cos(3t)\big)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 5^y\, dy = \int \big(2t^2 - t\cos(3t)\big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{5^y}{\ln 5} = 2\frac{t^3}{3} - \int t\cos(3t)\, dt.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int \big(t\cos(3t)\big)\, dt = t\frac{\operatorname{sen}(3t)}{3} - \int \frac{\operatorname{sen}(3t)}{3}\, dt = \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{9}\cos(3t) + c,$$

dove $c$ è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{5^y}{\ln 5} = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_5\left(\Big(\frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + c\Big)\ln 5\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{5}{\ln 5} = -\frac{1}{9} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{9} + \frac{5}{\ln 5}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_5\left(\Big(\frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{9}\Big)\ln 5 + 5\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y 5^z\, dz = \int_0^t \big(2s^2 - s\cos(3s)\big)\, ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{5^z}{\ln 5}\right]_1^y = \left[\frac{2}{3}s^3 - \frac{s}{3}\operatorname{sen}(3s) - \frac{1}{9}\cos(3s)\right]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{5^y}{\ln 5} - \frac{5}{\ln 5} = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{9}$$

che risolta rispetto a $y$ fornisce la soluzione cercata.

**11** Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{x^2 2^x - 3x}{x^2}\Big)\, dx = 5\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int 2^x\, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx = 5\operatorname{tg} x - \frac{2^x}{\ln 2} + 3\ln|x| + c,$$

con $c$ costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\int_0^\pi (2x-3)\operatorname{sen}(2x)\, dx = \Big[(2x-3)\frac{-\cos(2x)}{2}\Big]_0^\pi + \int_0^\pi 2\frac{\cos(2x)}{2}\, dx$$
$$= -\frac{2\pi - 3}{2} - \frac{3}{2} + \Big[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\Big]_0^\pi = -\pi.$$

# Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 23/02/2010
A.A. 2009/2010

| Scritto | | Voto |
|---|---|---|
| Teoria | Esercizi | |

**Istruzioni**: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

| | |
|---|---|
| Cognome | Nome |
| Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$ | Matricola |
| Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$ | n. fogli (compreso questo) |

**1** Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

A $-\infty$

B $0^+$

C $0^-$

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

**2** Se $f$ è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f''(x) > 0$ per ogni $x \in ]a, b[$, allora

A $f$ è decrescente in $]a, b[$

B $f$ è crescente in $]a, b[$

C $f$ è convessa in $]a, b[$

D $f$ è concava in $]a, b[$

**3** L'equazione differenziale $y'' = te^y + y'(t + 5)$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

**4** Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{7 - 2x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

D nessuna delle precedenti

**5** Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico

**6** Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

**7** Enunciare il teorema dei punti critici

**8** Rappresentare il grafico di una funzione $g$ che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

**9** Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di $g$; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$; f) disegnare un grafico approssimativo di $g$.

**10** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t\,\mathrm{sen}(2t^2) + 3t^5}{y\sqrt[3]{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (2t + 1)^3$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

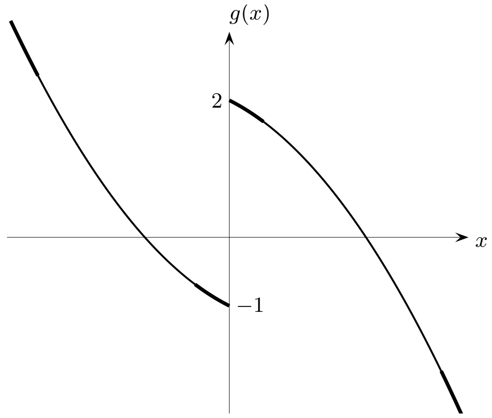
**11** Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left( \frac{2x^2\sqrt{x} - 1}{x^3} + \frac{5}{\mathrm{sen}^2 x} \right) dx, \qquad \int_0^1 \frac{3 - 5x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx.$$

**IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.**

## Soluzioni dei quesiti dell'esame del 23 febbraio 2010

**1** A; **2** C; **3** D; **4** C; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:




**9** a) La funzione è definita se $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ cioè $x \neq 1$, $x \neq 3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $2x^2 - 1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/\sqrt{2}$ oppure $x \geq 1/\sqrt{2}$. Il denominatore è positivo se $x^2 - 4x + 3 > 0$ cioè se $x < 1$ oppure $x > 3$. La funzione è dunque positiva per $x < -1/\sqrt{2}$ oppure $1/\sqrt{2} < x < 1$ oppure $x > 3$, negativa per $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ oppure $1 < x < 3$, mentre si annulla in $x = -1/\sqrt{2}$ e $x = 1/\sqrt{2}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1, in 3 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 - 1/x^2}{1 - 4/x + 3/x^2} = \left[\frac{2}{1}\right] = 2,$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\mp}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to 3^\pm} g(x) = \left[\frac{17}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

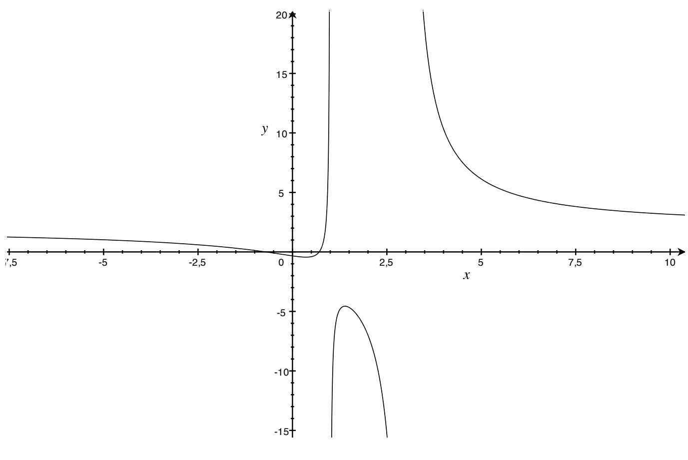
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{4x(x^2 - 4x + 3) - (2x^2 - 1)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 2\frac{-4x^2 + 7x - 2}{(x^2 - 4x + 3)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $-4x^2 + 7x - 2 \geq 0$ cioè se e solo se $\frac{7-\sqrt{17}}{8} \leq x \leq \frac{7+\sqrt{17}}{8}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in ]-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{8}[ \cup ]\frac{7+\sqrt{17}}{8}, 3[ \cup ]3, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{7-\sqrt{17}}{8} \text{ oppure } x = \frac{7+\sqrt{17}}{8}, \\ > 0, & \text{se } x \in ]\frac{7-\sqrt{17}}{8}, 1[ \cup ]1, \frac{7+\sqrt{17}}{8}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]\frac{7-\sqrt{17}}{8}, 1[$ e in $]1, \frac{7+\sqrt{17}}{8}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{8}[$, in $]\frac{7+\sqrt{17}}{8}, 3[$ e in $]3, +\infty[$. In $x = \frac{7-\sqrt{17}}{8}$ ed $x = \frac{7+\sqrt{17}}{8}$ ammette, rispettivamente, un minimo ed un massimo relativo.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = 1/8$ e $g'(-1) = -13/32$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{13}{32}(x+1) + \frac{1}{8}.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ a) Si ha $y'(t) = 6(2t+1)^2$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$6(2t+1)^2 = \frac{t \operatorname{sen}(2t^2) + 3t^5}{(2t+1)^4}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $6 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si osservi che $y\sqrt[3]{y} = y^{4/3}$. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^{4/3}\, dy = \big(t \operatorname{sen}(2t^2) + 3t^5\big)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{4/3}\, dy = \int \big(t \operatorname{sen}(2t^2) + 3t^5\big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{7/3}}{7/3} = \int t \operatorname{sen}(2t^2)\, dt + \frac{3}{6}t^6.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo mediante la seconda tabella

$$\int t \operatorname{sen}(2t^2)\, dt = \frac{1}{4}\int 4t \operatorname{sen}(2t^2)\, dt = \frac{1}{4}\int (2t^2)' \operatorname{sen}(2t^2)\, dt = -\frac{1}{4}\cos(2t^2) + c,$$

dove $c$ è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{3}{7}y^{7/3} = -\frac{1}{4}\cos(2t^2) + \frac{3}{6}t^6 + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \Big(-\frac{7}{12}\cos(2t^2) + \frac{7}{6}t^6 + \frac{7c}{3}\Big)^{3/7}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $\frac{3}{7} = -\frac{1}{4} + c$ da cui segue $c = \frac{19}{28}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \Big(-\frac{7}{12}\cos(2t^2) + \frac{7}{6}t^6 + \frac{19}{12}\Big)^{3/7}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^{4/3}\, dz = \int_0^t \big(s \operatorname{sen}(2s^2) + 3s^5\big)\, ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{7/3}}{7/3}\right]_1^y = \left[-\frac{1}{4}\cos(2s^2) + \frac{s^6}{2}\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{7}y^{7/3} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{4}\cos(2t^2) + \frac{t^6}{2} + \frac{1}{4}$$

che risolta rispetto a $y$ fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{2x^2\sqrt{x} - 1}{x^3} + \frac{5}{\operatorname{sen}^2 x}\Big)\, dx &= 2\int x^{-1/2}\, dx - \int x^{-3}\, dx + 5\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx \\ &= 2\frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{x^{-2}}{-2} - 5\cot x + c = 4\sqrt{x} + \frac{1}{2x^2} - 5\cot x + c,\end{aligned}$$

con $c$ costante arbitraria. Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3 - 5x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx &= 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx + \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx \\ &= 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx + \frac{5}{2}\int_0^1 (4 - x^2)'(4 - x^2)^{-1/2}\, dx \\ &= \Big[3 \operatorname{arcsen}(x/2) + 5\sqrt{4 - x^2}\Big]_0^1 = 3 \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + 5\sqrt{3} - 10 = \frac{\pi}{2} + 5\sqrt{3} - 10.\end{aligned}$$

# Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 14/07/2010
A.A. 2009/2010

| Scritto | | Voto |
|---|---|---|
| Teoria | Esercizi | |

**Istruzioni**: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

| | |
|---|---|
| Cognome | Nome |
| Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$ | Matricola |
| Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$ | n. fogli (compreso questo) |

**1** Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C $0$
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

**2** Se $f$ è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in ]a,b[$, allora

- A $f$ è decrescente in $]a,b[$
- B $f$ è crescente in $]a,b[$
- C $f$ è convessa in $]a,b[$
- D $f$ è concava in $]a,b[$

**3** L'equazione differenziale $y'' = 2^t y + y' \cos t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

**4** Il grafico della funzione $f(x) = -\dfrac{3}{5x}$ rappresenta

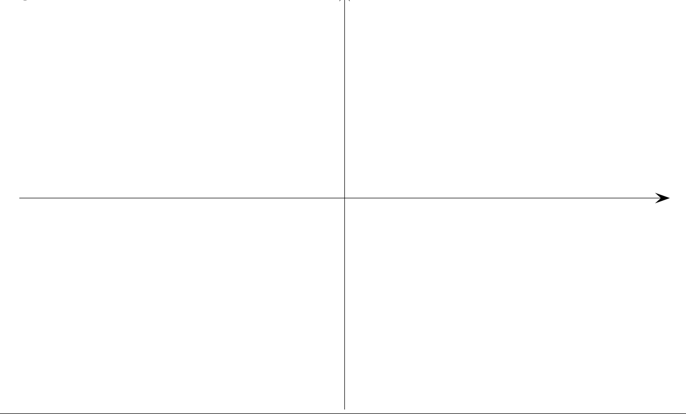
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

**5** Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



**6** Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

**7** Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione $f$

**8** Rappresentare il grafico di una funzione $g$ che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -2$$

**9** Data la funzione

$$g(x) = 1 + \frac{3x + 5}{(x + 1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di $g$; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -2$; f) disegnare un grafico approssimativo di $g$.

**10** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^4 + 1}{y^3 t^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2(t-1)}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

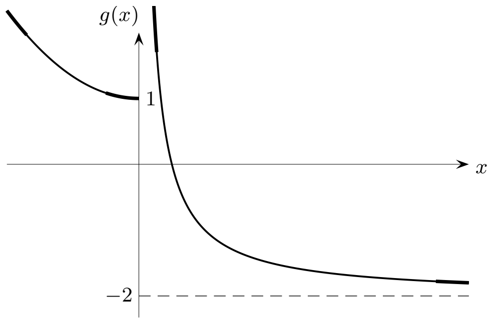
**11** Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left( \frac{1 - x}{2\sqrt{x}} - 4 \cos x \right) dx, \qquad \int_0^2 \frac{3x + 1}{x^2 + 4}\, dx.$$

**IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.**

## Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 luglio 2010

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ B; $\boxed{4}$ C; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:




$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che $g$ si può scrivere nella seguente forma

$$g(x) = \frac{x^2+5x+6}{(x+1)^2}.$$

b) Il numeratore è $\geq 0$ se $x^2+5x+6 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -3$ oppure $x \geq -2$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. La funzione è dunque positiva per $x < -3$, oppure $-2 < x < -1$ oppure $x > -1$, negativa per $-3 < x < -2$, e si annulla in $x = -2$ oppure $x = -3$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3/x+5/x^2}{(1+1/x)^2} = \left[1+\frac{0}{1}\right] = 1, \qquad \lim_{x\to-1} g(x) = \left[1+\frac{2}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

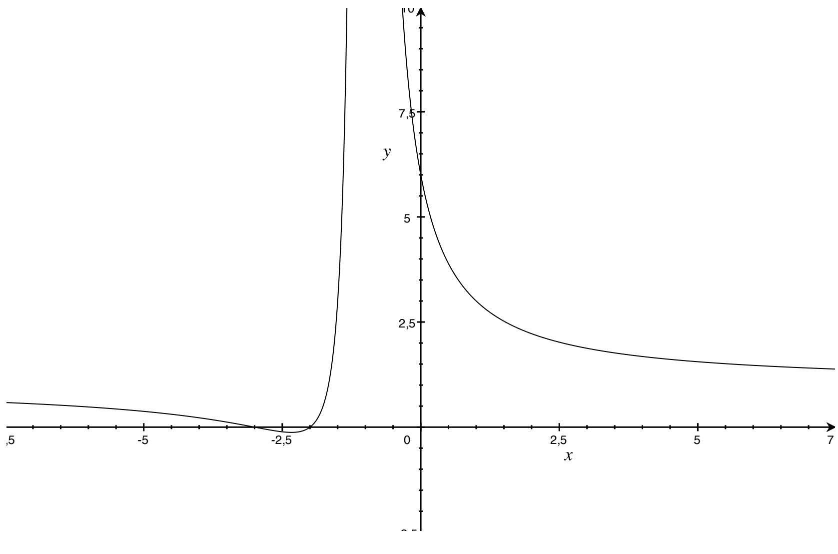
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \Big(\frac{3x+5}{(x+1)^2}\Big)' = \frac{3(x+1)^2-(3x+5)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{3(x+1)-(3x+5)2}{(x+1)^3} = \frac{-(3x+7)}{(x+1)^3}.$$

Il numeratore è $\geq 0$ quando $3x+7 \leq 0$ cioè se e solo se $x \leq -7/3$, il denominatore è positivo se $x+1 > 0$ cioè $x > -1$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in ]-\infty, -7/3[\cup]-1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -7/3, \\ > 0, & \text{se } x \in ]-7/3, -1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -7/3[$ e in $]-1, +\infty[$, mentre è crescente in $]-7/3, -1[$. In $x = -7/3$ ammette un minimo assoluto.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-2) = 0$ e $g'(-2) = 1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = x + 2.$$

**10** a) Si ha $y'(t) = 2e^{2(t-1)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2e^{2(t-1)} = \frac{2e^{8(t-1)} + 1}{e^{6(t-1)}t^3}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $2 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1) = 1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y^3}{2y^4 + 1}\,dy = \frac{1}{t^3}\,dt$$

e ricordando che $1/t^3 = t^{-3}$ e integrando

$$\int \frac{y^3}{2y^4 + 1}\,dy = \int t^{-3}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y^3}{2y^4 + 1}\,dy = -\frac{1}{2t^2} + c,$$

dove $c$ è la generica costante d'integrazione. Essendo (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{y^3}{2y^4 + 1}\,dy = \frac{1}{8}\int \frac{8y^3}{2y^4 + 1}\,dt = \frac{1}{8}\int \frac{(2y^4 + 1)'}{2y^4 + 1}\,dt = \frac{1}{8}\ln(2y^4 + 1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = 1$ si ottiene

$$\frac{1}{8}\ln(2y^4 + 1) = -\frac{1}{2t^2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(\exp\big(8c - \frac{4}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{8}\ln 3 = -\frac{1}{2} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{2} + \frac{\ln 3}{8}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(3\exp\big(4 - \frac{4}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{z^3}{2z^4 + 1}\,dz = \int_1^t s^{-3}\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{8}\ln(2z^4 + 1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{2s^2}\Big]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{8}\ln(2y^4 + 1) - \frac{1}{8}\ln 3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\end{aligned}$$

che risolta rispetto a $y$ fornisce la soluzione cercata.

**11** Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{1 - x}{2\sqrt{x}} - 4\cos x\Big)\,dx &= \frac{1}{2}\int x^{-1/2}\,dx - \frac{1}{2}\int x^{1/2}\,dx - 4\int \cos x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{1}{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} - 4\,\mathrm{sen}\,x + c = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3} - 4\,\mathrm{sen}\,x + c,\end{aligned}$$

con $c$ costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{3x + 1}{x^2 + 4}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 4}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4}\,dx + = \Big[\frac{3}{2}\ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\Big]_0^2 = \frac{3\ln 2}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

# Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 01/09/2010
A.A. 2009/2010

| Scritto | | Voto |
|---|---|---|
| Teoria | Esercizi | |

**Istruzioni**: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

| Cognome | Nome |
|---|---|
| Corso di Laurea *VIT* *STAL* | Matricola |
| Vecchio ordinamento *SI* *NO* | n. fogli (compreso questo) |

**1** Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x))$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C non esiste

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

**2** Se $f$ è una funzione derivabile in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ per $x_0 \in ]a, b[$, allora

A $x_0$ è punto di minimo relativo per $f$

B $x_0$ è punto di massimo relativo per $f$

C $x_0$ è punto critico per $f$

D nessuna delle precedenti

**3** L'equazione differenziale $y' = 5t - t \ln y$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

**4** Il grafico della funzione $f(x) = \frac{\pi}{e}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

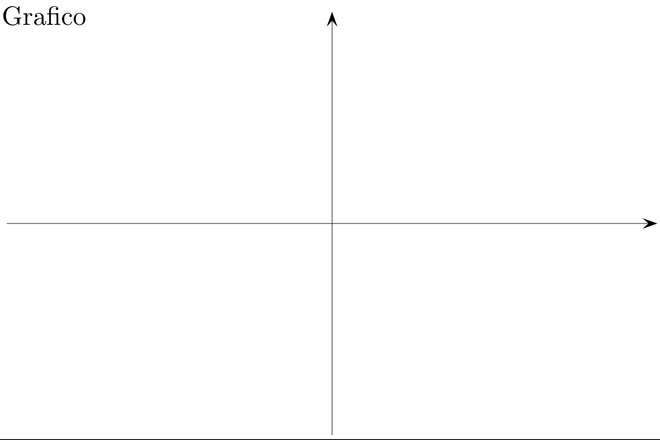
D nessuna delle precedenti

**5** Per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



**6** Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

**7** Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

**8** Rappresentare il grafico di una funzione $g$ che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

**9** Data la funzione

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di $g$; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di $g$.

**10** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y - t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \sqrt{t^2+1}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

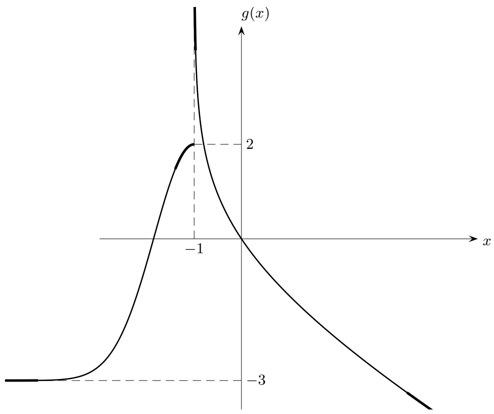
**11** Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4x^5+3}{x^2} - \frac{5}{x^2+1}\right) dx, \qquad \int_0^1 (2x - x^2)\mathrm{e}^{-2x}\, dx.$$

**IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.**

## Soluzioni dei quesiti dell'esame del 1 settembre 2010

**1** A; **2** C; **3** C; **4** A; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:




**9** a) La funzione è definita se $1-2x \neq 0$ cioè $x \neq 1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è sempre positivo dunque la funzione è positiva per $x < 1/2$, negativa per $x > 1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(1/2)^{\pm}} g(x) = \left[\frac{\mathrm{e}}{0^{\mp}}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo, mentre, utilizzando il limite fondamentale $\lim_{z\to+\infty} \mathrm{e}^z/z = +\infty$ (oppure, alternativamente, il teorema di de L'Hôpital) si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x/x}{1/x-2} = \left[\frac{+\infty}{-2}\right] = -\infty.$$

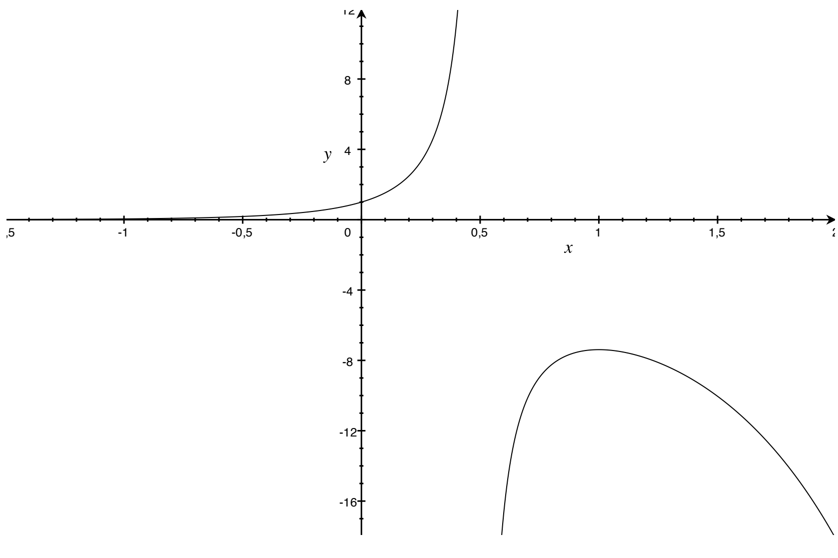
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}(1-2x) - \mathrm{e}^{2x}(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{4\mathrm{e}^{2x}(1-x)}{(2x-1)^2}.$$

Poiché i fattori $\mathrm{e}^{2x}$ e $(2x-1)^2$ sono sempre positivi nel dominio si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in ]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1, \\ > 0, & \text{se } x \in ]-\infty, 1/2[ \cup ]1/2, 1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]1,+\infty[$, mentre è crescente in $]-\infty, 1/2[$ e in $]1/2, 1[$. In $x = 1$ ammette un massimo relativo.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = 4\frac{\left[2e^{2x}(1-x) - e^{2x}\right](2x-1)^2 - e^{2x}(1-x)2(2x-1)2}{(2x-1)^4}$$
$$= 4\frac{\left[2e^{2x}(1-x) - e^{2x}\right](2x-1) - e^{2x}(1-x)4}{(2x-1)^3} = \frac{4e^{2x}(4x^2-8x-5)}{(1-2x)^3}.$$

Poiché il polinomio $4x^2-8x-5$ è sempre positivo, la derivata seconda è positiva se e solo se $(1-2x)^3 > 0$ cioè $x < 1/2$. In definitiva $g''(x) > 0$ se $x \in ]-\infty, 1/2[$ e $g''(x) < 0$ se $x \in ]1/2, +\infty[$ perciò la funzione è convessa in $]-\infty, 1/2[$, mentre è concava in $]1/2, +\infty[$.

**10** a) Si ha $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}2t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = 2\sqrt{t^2+1} - t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq 2$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 2t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$y(t) = e^{2t}\int e^{-2t}(-t^2)\, dt = e^{2t}\left(\frac{e^{-2t}}{-2}(-t^2) - \int e^{-2t} t\, dt\right) = e^{2t}\left(\frac{e^{-2t}}{2}t^2 - \left(\frac{e^{-2t}}{-2}t - \int \frac{e^{-2t}}{-2}\, dt\right)\right)$$
$$= e^{2t}\left(\frac{e^{-2t}}{2}t^2 + \frac{e^{-2t}}{2}t + \frac{e^{-2t}}{4} + c\right) = c\,e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4},$$

dove $c$ è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $1 = c + 1/4$ cioè $c = 3/4$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = e^{A(t)}\left(\int_0^t e^{-A(s)} b(s)\, ds + 1\right)$$

dove $A(t) = \int_0^t a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = 2t$ e

$$y(t) = e^{2t}\left(\int_0^t e^{-2s}(-s^2)\, ds + 1\right) = e^{2t}\left(\frac{e^{-2t}}{2}t^2 + \frac{e^{-2t}}{2}t + \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.$$

**11** Dalla prima tabella si ottiene

$$\int\left(\frac{4x^5+3}{x^2} - \frac{5}{x^2+1}\right) dx = 4\int x^3\, dx + 3\int x^{-2}\, dx - 5\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$
$$= x^4 + 3\frac{x^{-1}}{-1} - 5\operatorname{arctg} x + c = x^4 - \frac{3}{x} - 5\operatorname{arctg} x + c,$$

con $c$ costante arbitraria. Utilizzando il metodo per parti due volte di seguito si ha

$$\int_0^1 (2x-x^2)e^{-2x}\, dx = \left[(2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2-2x)\frac{e^{-2x}}{-2}\, dx = -\frac{e^{-2}}{2} + \int_0^1 (1-x)e^{-2x}\, dx$$
$$= -\frac{e^{-2}}{2} + \left[(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\frac{e^{-2x}}{-2}\, dx = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} - \left[\frac{e^{-2x}}{-4}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{4e^2}.$$

# Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 17/09/2010
A.A. 2009/2010

| Scritto | | Voto |
|---|---|---|
| Teoria | Esercizi | |

**Istruzioni**: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

| | |
|---|---|
| Cognome | Nome |
| Corso di Laurea *VIT* *STAL* | Matricola |
| Vecchio ordinamento *SI* *NO* | n. fogli (compreso questo) |

**1** Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C $0$
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

**2** Se $f$ è una funzione derivabile in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) > 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in ]a, b[$, allora

- A $x_0$ è sempre punto di minimo relativo per $f$
- B $x_0$ è sempre punto di massimo relativo per $f$
- C $x_0$ è sempre punto di flesso relativo per $f$
- D nessuna delle precedenti

**3** L'equazione differenziale $y'' = \dfrac{t}{y} + 3y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

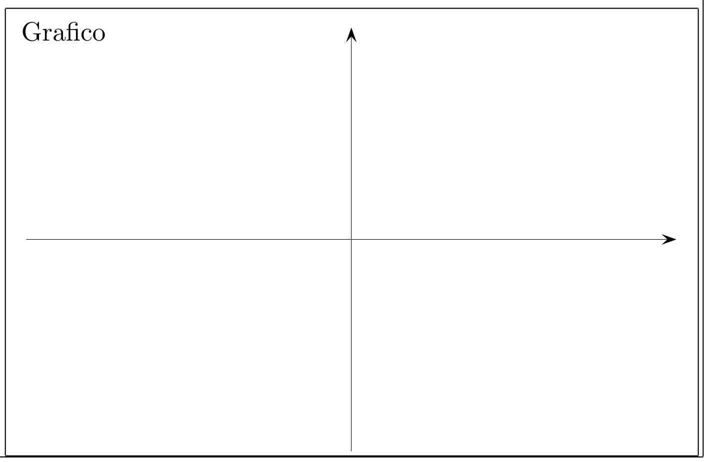
**4** Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

**5** Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$



**6** Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in un punto $x_0$ è:

**7** Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

**8** Rappresentare il grafico di una funzione $g$ che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

**9** Data la funzione

$$g(x) = \frac{-2x^2}{x^4+1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di $g$; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$; f) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; g) disegnare un grafico approssimativo di $g$.

**10** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y(t^2+2)}{t\ln y} \\ y(1) = \mathrm{e} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2t-1}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

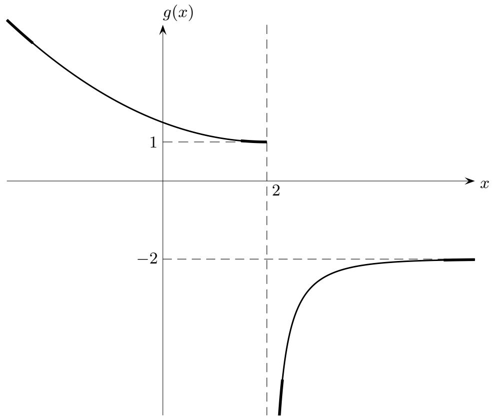
**11** Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3-2x^5\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + 3^x\right) dx, \qquad \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\, dx.$$

**IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.**

### Soluzioni dei quesiti dell'esame del 17 settembre 2010

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:




$\boxed{9}$ a) Poiché il denominatore è sempre strettamente positivo, la funzione è sempre definita dunque $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Essendo razionale è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che $g$ è funzione pari quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, dunque basterebbe studiarlo per $x \geq 0$.

b) Il denominatore è sempre positivo, il numeratore è negativo tranne che in $x = 0$, dunque la funzione è sempre negativa e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{x^2 + 1/x^2} = \left[\frac{-2}{+\infty}\right] = 0.$$

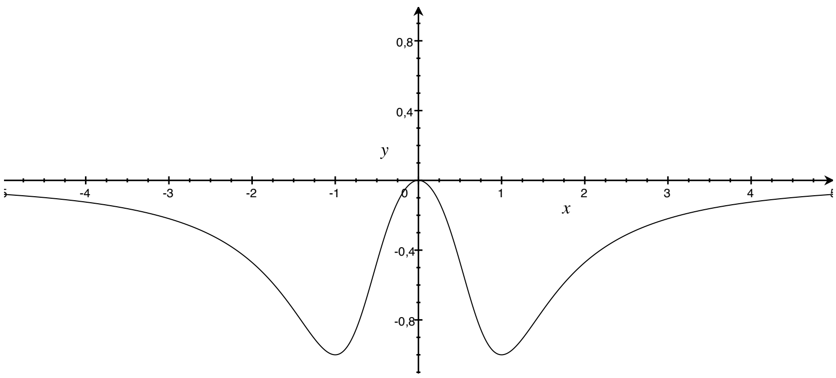
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-4x(x^4+1) + 2x^2 4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{4x^5 - 4x}{(x^4+1)^2} = \frac{4x(x^4-1)}{(x^4+1)^2}.$$

Poiché $x^4 - 1 \geq 0$ se e solo se $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$, il numeratore è positivo per $-1 < x < 0$ oppure $x > 1$, mentre il denominatore è sempre positivo. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[, \\ = 0, & \text{se } x = -1 \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = 1, \\ > 0, & \text{se } x \in ]-1, 0[ \cup ]1, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -1[$ e in $]0, 1[$, mentre è crescente in $]-1, 0[$ e in $]1, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un massimo assoluto mentre in $x = -1$ e $x = 1$ ammette due minimi assoluti.




e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = -\frac{8}{17}$ e $g'(2) = \frac{120}{289}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{120}{289}(x-2) - \frac{8}{17}.$$

f) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= 4\frac{(5x^4-1)(x^4+1)^2 - (x^5-x)2(x^4+1)4x^3}{(x^4+1)^4} \\ &= 4\frac{(5x^4-1)(x^4+1) - (x^5-x)8x^3}{(x^4+1)^3} = \frac{4(-3x^8+12x^4-1)}{(x^4+1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata seconda è $\geq 0$ se e solo se $-3x^8+12x^4-1 \geq 0$ ovvero $3x^8 - 12x^4 + 1 \leq 0$. Quest'ultima è riconducibile ad una disequazione di secondo grado: posto $z = x^4$ si ottiene $3z^2 - 12z + 1 \leq 0$, le cui soluzioni sono date da $\frac{6-\sqrt{33}}{3} \leq z \leq \frac{6+\sqrt{33}}{3}$. Nella variabile $x$ si ottiene dunque $\frac{6-\sqrt{33}}{3} \leq x^4 \leq \frac{6+\sqrt{33}}{3}$ che è verificata se e solo se $\sqrt[4]{\frac{6-\sqrt{33}}{3}} \leq x \leq \sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{33}}{3}}$ oppure $-\sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{33}}{3}} \leq x \leq -\sqrt[4]{\frac{6-\sqrt{33}}{3}}$. Posto $x_1 = \sqrt[4]{\frac{6-\sqrt{33}}{3}}$ e $x_2 = \sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{33}}{3}}$ si ottiene che la funzione è convessa in $]-x_2, -x_1[$ e in $]x_1, x_2[$, mentre è concava in $]-\infty, -x_2[$, in $]-x_1, x_1[$ e in $]x_2, +\infty[$. In $x = -x_1$, $x = -x_2$, $x = x_1$ e $x = x_2$ ammette dei punti di flesso.

**10** a) Si ha $y'(t) = 2\mathrm{e}^{2t-1}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\mathrm{e}^{2t-1} = \frac{\mathrm{e}^{2t-1}(t^2+2)}{t \ln \mathrm{e}^{2t-1}} = \frac{\mathrm{e}^{2t-1}(t^2+2)}{t(2t-1)}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $2\mathrm{e} \neq 3\mathrm{e}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1) = \mathrm{e}$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln y}{y}\, dy = \frac{t^2+2}{t}\, dt = \Big(t + \frac{2}{t}\Big)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{\ln y}{y}\, dy = \int \Big(t + \frac{2}{t}\Big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln^2 y = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c,$$

dove $c$ è la generica costante d'integrazione. Risolvendo nell'incognita $y$ si ottiene

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \exp\sqrt{t^2 + 4\ln t + 2c}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = \mathrm{e}$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c$, da cui si ricava $c = 0$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\sqrt{t^2 + 4\ln t}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\ln z}{z}\, dz = \int_1^t \Big(s + \frac{2}{s}\Big)\, ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{2}\ln^2 z\Big]_{\mathrm{e}}^{y} = \Big[\frac{s^2}{2} + 2\ln s\Big]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln^2 y - \frac{1}{2} = \frac{t^2}{2} + 2\ln t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a $y$ fornisce la soluzione cercata.

**11** Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \Big(\frac{3 - 2x^5 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + 3^x\Big)\, dx &= 3\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx - 2\int x^5\, dx + \int 3^x\, dx \\ &= -3\cot x - \frac{x^6}{3} + \frac{3^x}{\ln 3} + c, \end{aligned}$$

con $c$ costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\, dx = \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{6x}{\sqrt{3x^2+4}}\, dx = \frac{1}{6}\int_0^2 (3x^2+4)^{-1/2}(3x^2+4)'\, dx = \frac{1}{6}\Big[\frac{(3x^2+4)^{1/2}}{1/2}\Big]_0^2 = \frac{2}{3}.$$