Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 02/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è decrescente in $]a,b[$
- B f è crescente in $]a,b[$
- C f è convessa in $]a,b[$
- D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y' = e^t t^2 + y \ln t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{3x^2+5}$ rappresenta

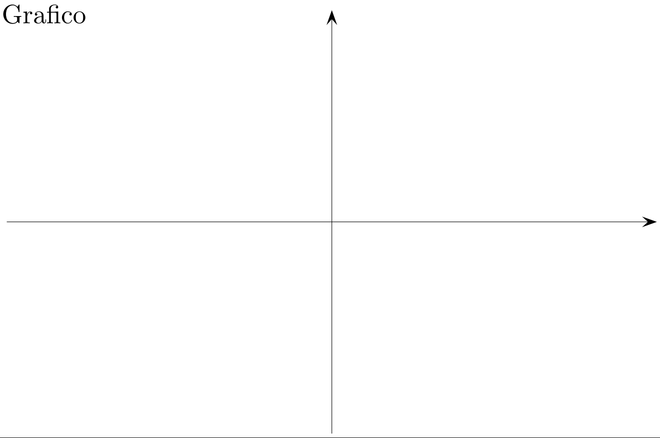
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{2/9} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{2x-1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t^2 - t\cos(3t)}{5^y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 1 + \ln(3t+1)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

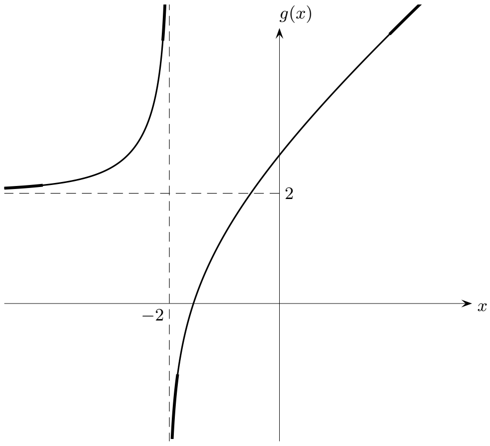
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{x^2 2^x - 3x}{x^2}\Big)\, dx, \qquad \int_0^\pi (2x-3)\,\mathrm{sen}(2x)\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 2 febbraio 2010

1 D; **2** A; **3** A; **4** D; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) La funzione è definita se $2x - 1 \neq 0$ cioè $x \neq 1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se $x^3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x > 1/2$. La funzione è dunque positiva per $x < 0$ oppure $x > 1/2$, negativa per $0 < x < 1/2$, e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2 - 1/x} = \left[\frac{+\infty}{2}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to(1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{1/8}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

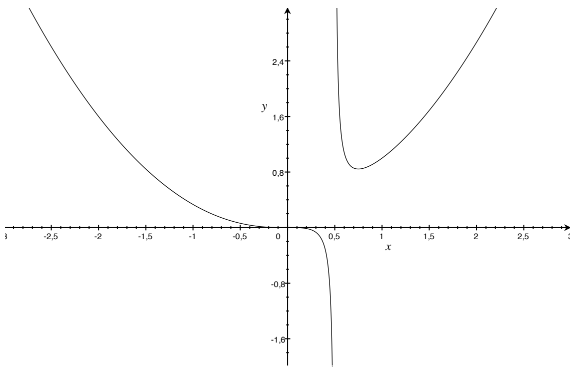
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(2x-1) - x^3 2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2} = \frac{x^2(4x-3)}{(2x-1)^2}.$$

La derivata prima si annulla se $x^2 = 0$ oppure $4x - 3 = 0$ cioè se $x = 0$ oppure $x = 3/4$. Tolti questi punti, il numeratore è positivo quando $4x - 3 > 0$ cioè se e solo se $x > 3/4$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1/2[\cup]1/2, 3/4[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3/4, \\ > 0, & \text{se } x \in]3/4, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, 1/2[$ e in $]1/2, 3/4[$, mentre è crescente in $]3/4, +\infty[$. In $x = 3/4$ ammette un minimo relativo, in $x = 0$ un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(12x^2 - 6x)(2x-1)^2 - (4x^3 - 3x^2)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} \\ &= \frac{(12x^2 - 6x)(2x-1) - (4x^3 - 3x^2)4}{(2x-1)^3} = \frac{2x(4x^2 - 6x + 3)}{(2x-1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $4x^2-6x+3$ è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \geq 0$, il denominatore se $x > 1/2$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1/2, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 1/2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty, 0[$ e in $]1/2, +\infty[$, mentre è concava in $]0, 1/2[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{3}{3t+1}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{3}{3t+1} = \frac{2t^2 - t\cos(3t)}{5^{1+\ln(3t+1)}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $3 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$5^y\, dy = \big(2t^2 - t\cos(3t)\big)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 5^y\, dy = \int \big(2t^2 - t\cos(3t)\big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{5^y}{\ln 5} = 2\frac{t^3}{3} - \int t\cos(3t)\, dt.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int \big(t\cos(3t)\big)\, dt = t\frac{\operatorname{sen}(3t)}{3} - \int \frac{\operatorname{sen}(3t)}{3}\, dt = \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{9}\cos(3t) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{5^y}{\ln 5} = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + c \quad \Longleftrightarrow \quad y = \log_5\left(\Big(\frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + c\Big)\ln 5\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{5}{\ln 5} = -\frac{1}{9} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{9} + \frac{5}{\ln 5}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_5\left(\Big(\frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{9}\Big)\ln 5 + 5\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y 5^z\, dz = \int_0^t \big(2s^2 - s\cos(3s)\big)\, ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{5^z}{\ln 5}\right]_1^y = \left[\frac{2}{3}s^3 - \frac{s}{3}\operatorname{sen}(3s) - \frac{1}{9}\cos(3s)\right]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{5^y}{\ln 5} - \frac{5}{\ln 5} = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{9}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{x^2 2^x - 3x}{x^2}\Big)\, dx = 5\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int 2^x\, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx = 5\operatorname{tg} x - \frac{2^x}{\ln 2} + 3\ln|x| + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\int_0^\pi (2x-3)\operatorname{sen}(2x)\, dx = \left[(2x-3)\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\frac{\cos(2x)}{2}\, dx$$
$$= -\frac{2\pi - 3}{2} - \frac{3}{2} + \left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right]_0^\pi = -\pi.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 02/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x) < 0$ in $]a,b[$, allora

A f è decrescente in $]a,b[$

B f è crescente in $]a,b[$

C f è convessa in $]a,b[$

D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = y' \operatorname{sen} t - t^2 y^3$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \pi e^2$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

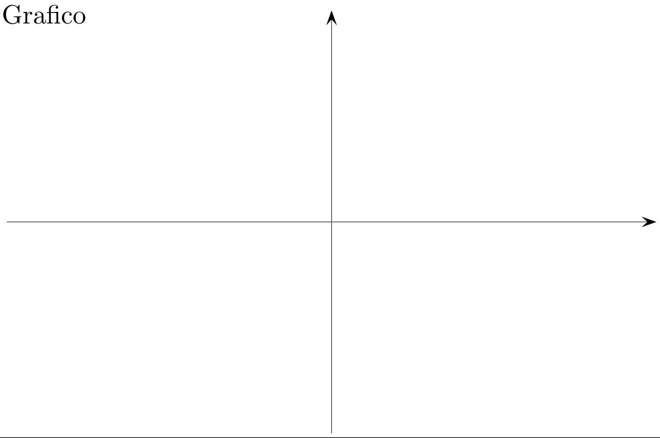
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a,b[$ è:

7 Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{3x+1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3t\,\mathrm{sen}(2t) - t^7}{2^y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 3\ln(2t + \mathrm{e}) - 1$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

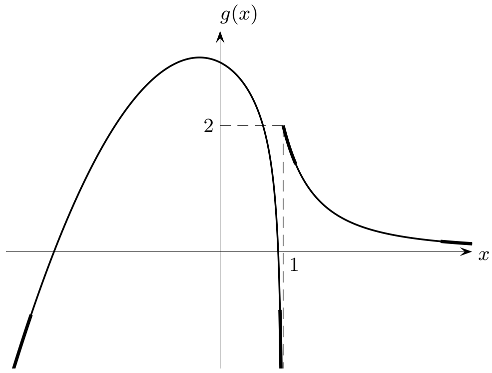
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2+3^x\sqrt{x}}{3^x} + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx, \qquad \int_0^{\pi} (5-2x)\cos(5x)\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 2 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ C; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ A; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $3x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se $x^3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x > -1/3$. La funzione è dunque positiva per $x < -1/3$ oppure $x > 0$, negativa per $-1/3 < x < 0$, e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/3$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3+1/x} = \left[\frac{+\infty}{3}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to(-1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{-1/27}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

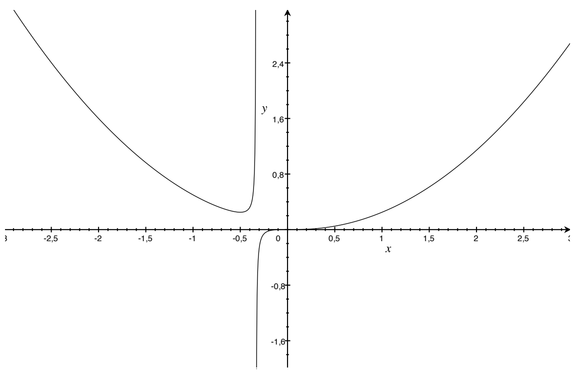
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(3x+1) - x^3 3}{(3x+1)^2} = \frac{6x^3+3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2(2x+1)}{(3x+1)^2}.$$

La derivata prima si annulla se $x^2 = 0$ oppure $2x+1 = 0$ cioè se $x = 0$ oppure $x = -1/2$. Tolti questi punti, il numeratore è positivo quando $2x+1 > 0$ cioè se e solo se $x > -1/2$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/2[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = -1/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1/2, -1/3[\cup]-1/3, 0[\cup]0, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -1/2[$, mentre è crescente in $]-1/2, -1/3[$ e in $]-1/3, +\infty[$. In $x = -1/2$ ammette un minimo relativo, in $x = 0$ un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(18x^2+6x)(3x+1)^2 - (6x^3+3x^2)2(3x+1)3}{(3x+1)^4} \\ &= \frac{(18x^2+6x)(3x+1) - (6x^3+3x^2)6}{(3x+1)^3} = \frac{6x(3x^2+3x+1)}{(3x+1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $3x^2+3x+1$ è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \geq 0$, il denominatore se $x > -1/3$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/3[\cup]0, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/3, 0[, \end{cases}$$

perciò la funzione è convessa in $]-\infty, -1/3[$ e in $]0, +\infty[$, mentre è concava in $]-1/3, 0[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{6}{2t+\mathrm{e}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{6}{2t+\mathrm{e}} = \frac{3t\,\mathrm{sen}(2t) - t^7}{2^{3\ln(2t+\mathrm{e})-1}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $6/\mathrm{e} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 2$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$2^y\,dy = \big(3t\,\mathrm{sen}(2t) - t^7\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 2^y\,dy = \int \big(3t\,\mathrm{sen}(2t) - t^7\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2^y}{\ln 2} = 3\int t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt - \frac{t^8}{8}.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int t\,\mathrm{sen}(2t)\,dt = t\frac{-\cos(2t)}{2} + \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = -\frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2t) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{2^y}{\ln 2} = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{t^8}{8} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_2\bigg(\Big(-\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{t^8}{8} + c\Big)\ln 2\bigg).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 2$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha $\frac{4}{\ln 2} = c$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_2\bigg(\Big(-\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{t^8}{8}\Big)\ln 2 + 2\bigg).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_2^y 2^z\,dz = \int_0^t \big(3s\,\mathrm{sen}(2s) - s^7\big)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \bigg[\frac{2^z}{\ln 2}\bigg]_2^y = \bigg[-\frac{3}{2}s\cos(2s) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2s) - \frac{s^8}{8}\bigg]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2^y}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 2} = -\frac{3}{2}t\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{t^8}{8}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{2+3^x\sqrt{x}}{3^x} + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx = 2\int 3^{-x}\,dx + \int \sqrt{x}\,dx + 7\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\frac{3^{-x}}{\ln 3} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + 7\arcsen x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\int_0^\pi (5-2x)\cos(5x)\,dx = \Big[(5-2x)\frac{\mathrm{sen}(5x)}{5}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-2)\frac{\mathrm{sen}(5x)}{5}\,dx$$

$$= 0 + \Big[-\frac{2}{25}\cos(5x)\Big]_0^\pi = \frac{4}{25}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 02/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B 1
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = (3y' - yt^3)\ln t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{7x - 1 - 8x^2}{2 - \pi}$ rappresenta

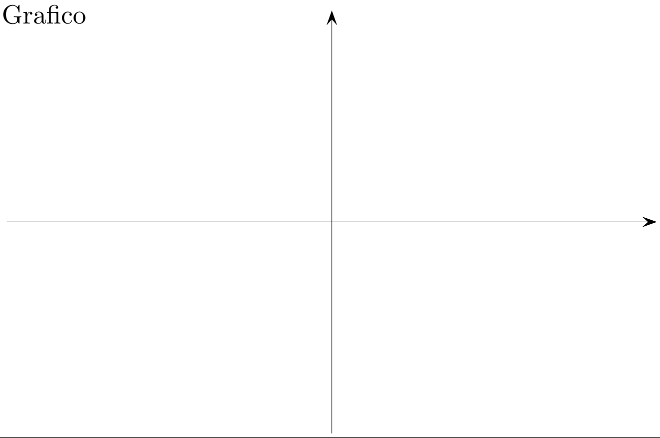
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 L'integrale definito di una funzione positiva f su $[a, b]$ rappresenta:

7 Enunciare il teorema dei punti critici

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{-x^3}{5x-1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t\cos(5t) + 3t^4}{3^y} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 2 + \ln(2t + \mathrm{e})$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

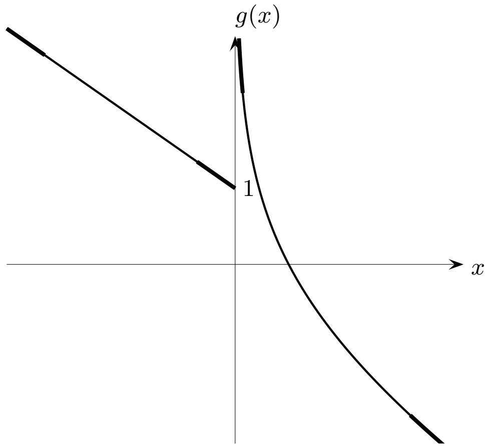
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{2}{x^2+1} + \frac{x^5 5^x - 3}{5^x} \right) dx, \qquad \int_0^{\pi/2} (3x+1)\,\mathrm{sen}(3x)\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 2 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ B; $\boxed{\mathbf{4}}$ B; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $5x - 1 \neq 0$ cioè $x \neq 1/5$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/5\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se $-x^3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq 0$, il denominatore è positivo se $x > 1/5$. La funzione è dunque positiva per $0 < x < 1/5$, negativa per $x < 0$ oppure $x > 1/5$, e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/5$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{5-1/x} = \left[\frac{-\infty}{5}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to(1/5)^\pm} g(x) = \left[\frac{-1/125}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

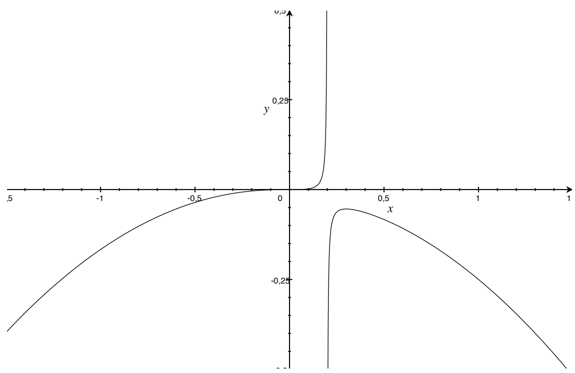
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-3x^2(5x-1) + x^3 5}{(5x-1)^2} = \frac{3x^2 - 10x^3}{(5x-1)^2} = \frac{x^2(3-10x)}{(5x-1)^2}.$$

La derivata prima si annulla se $x^2 = 0$ oppure $3 - 10x = 0$ cioè se $x = 0$ oppure $x = 3/10$. Tolti questi punti, il numeratore è positivo quando $3 - 10x > 0$ cioè se e solo se $x < 3/10$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1/5[\cup]1/5, 3/10[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3/10, \\ < 0, & \text{se } x \in]3/10, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 1/5[$ e in $]1/5, 3/10[$, mentre è decrescente in $]3/10, +\infty[$. In $x = 3/10$ ammette un massimo relativo, in $x = 0$ un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(6x - 30x^2)(5x-1)^2 - (3x^2 - 10x^3)2(5x-1)5}{(5x-1)^4} \\ &= \frac{(6x - 30x^2)(5x-1) - (3x^2 - 10x^3)10}{(5x-1)^3} = \frac{-2x(25x^2 - 15x + 3)}{(5x-1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $25x^2 - 15x + 3$ è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \leq 0$, il denominatore se $x > 1/5$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1/5, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in]0, 1/5[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]1/5, +\infty[$, mentre è convessa in $]0, 1/5[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{2}{2t+\mathrm{e}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{2}{2t+\mathrm{e}} = \frac{2t\cos(5t) + 3t^4}{3^{2+\ln(2t+\mathrm{e})}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $2/\mathrm{e} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 3$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$3^y\, dy = \left(2t\cos(5t) + 3t^4\right) dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 3^y\, dy = \int \left(2t\cos(5t) + 3t^4\right) dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3^y}{\ln 3} = 2\int t\cos(5t)\, dt + 3\frac{t^5}{5}.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int t\cos(5t)\, dt = t\frac{\operatorname{sen}(5t)}{5} - \int \frac{\operatorname{sen}(5t)}{5}\, dt = \frac{t}{5}\operatorname{sen}(5t) + \frac{1}{25}\cos(5t) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{3^y}{\ln 3} = \frac{2}{5}t\operatorname{sen}(5t) + \frac{2}{25}\cos(5t) + \frac{3}{5}t^5 + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_3\left(\left(\frac{2}{5}t\operatorname{sen}(5t) + \frac{2}{25}\cos(5t) + \frac{3}{5}t^5 + c\right)\ln 3\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 3$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{27}{\ln 3} = \frac{2}{25} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{27}{\ln 3} - \frac{2}{25}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_3\left(\left(\frac{2}{5}t\operatorname{sen}(5t) + \frac{2}{25}\cos(5t) + \frac{3}{5}t^5 - \frac{2}{25}\right)\ln 3 + 27\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_3^y 3^z\, dz = \int_0^t \left(2s\cos(5s) + 3s^4\right) ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{3^z}{\ln 3}\right]_3^y = \left[\frac{2}{5}s\operatorname{sen}(5s) + \frac{2}{25}\cos(5s) + \frac{3}{5}s^5\right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{3^y}{\ln 3} - \frac{27}{\ln 3} = \frac{2}{5}t\operatorname{sen}(5t) + \frac{2}{25}\cos(5t) + \frac{3}{5}t^5 - \frac{2}{25} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{2}{x^2+1} + \frac{x^5 5^x - 3}{5^x}\right) dx = 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int x^5\, dx - 3\int 5^{-x}\, dx = 2\operatorname{arctg} x + \frac{x^6}{6} + 3\frac{5^{-x}}{\ln 5} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (3x+1)\operatorname{sen}(3x)\, dx &= \left[(3x+1)\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 3\frac{\cos(3x)}{3}\, dx \\ &= \frac{1}{3} + \left[\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0. \end{aligned}$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 02/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

A $-\infty$

B -3

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f

D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = 3t - (t+5)\ln y$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3-2x}{7+4x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

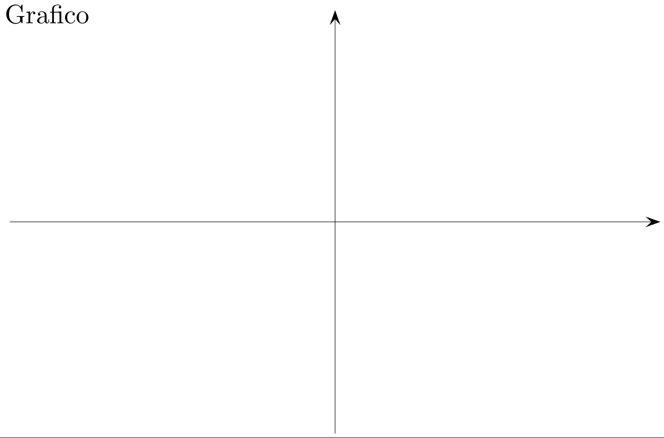
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (3/4)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta:

7 Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{1-4x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^8 + 3t\cos(2t)}{4^y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = 2 - \ln(\mathrm{e} + 5t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

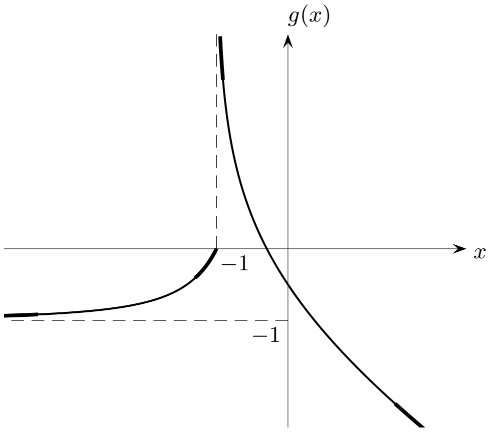
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{7x^2 - x^3 5^x}{x^3} - \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx, \qquad \int_0^{\pi/2} (1-4x)\operatorname{sen}(3x)\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 2 febbraio 2010

1 A; **2** D; **3** C; **4** C; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) La funzione è definita se $1 - 4x \neq 0$ cioè $x \neq 1/4$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/4\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 se $x^3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x < 1/4$. La funzione è dunque positiva per $0 < x < 1/4$, negativa per $x < 0$ oppure $x > 1/4$, e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/4$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1/x - 4} = \left[\frac{+\infty}{-4}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to(1/4)^\pm} g(x) = \left[\frac{1/64}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

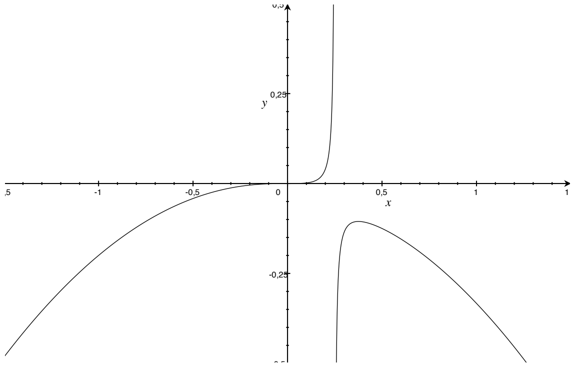
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{3x^2(1-4x) - x^3(-4)}{(1-4x)^2} = \frac{3x^2 - 8x^3}{(1-4x)^2} = \frac{x^2(3-8x)}{(1-4x)^2}.$$

La derivata prima si annulla se $x^2 = 0$ oppure $3 - 8x = 0$ cioè se $x = 0$ oppure $x = 3/8$. Tolti questi punti, il numeratore è positivo quando $3 - 8x > 0$ cioè se e solo se $x < 3/8$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1/4[\cup]1/4, 3/8[, \\ = 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } x = 3/8, \\ < 0, & \text{se } x \in]3/8, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 1/4[$ e in $]1/4, 3/8[$, mentre è decrescente in $]3/8, +\infty[$. In $x = 3/8$ ammette un massimo relativo, in $x = 0$ un punto di flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(6x - 24x^2)(1-4x)^2 - (3x^2 - 8x^3)2(1-4x)(-4)}{(1-4x)^4} \\ &= \frac{(6x - 24x^2)(1-4x) + (3x^2 - 8x^3)8}{(1-4x)^3} = \frac{2x(16x^2 - 12x + 3)}{(1-4x)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio $16x^2 - 12x + 3$ è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 se e solo se $x \geq 0$, il denominatore se $x < 1/4$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1/4, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in]0, 1/4[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]1/4, +\infty[$, mentre è convessa in $]0, 1/4[$. In $x = 0$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = -\frac{5}{\mathrm{e}+5t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-\frac{5}{\mathrm{e}+5t} = \frac{t^8 + 3t\cos(2t)}{4^{2-\ln(\mathrm{e}+5t)}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $-5/\mathrm{e} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$4^y \, dy = \big(t^8 + 3t\cos(2t)\big)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int 4^y \, dy = \int \big(t^8 + 3t\cos(2t)\big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{4^y}{\ln 4} = \frac{t^9}{9} + 3\int t\cos(2t)\, dt.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo per parti:

$$\int t\cos(2t)\, dt = t\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} - \int \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\, dt = \frac{t}{2}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{4^y}{\ln 4} = \frac{t^9}{9} + \frac{3}{2}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_4\left(\left(\frac{t^9}{9} + \frac{3}{2}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) + c\right)\ln 4\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{4}{\ln 4} = \frac{3}{4} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{4}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_4\left(\left(\frac{t^9}{9} + \frac{3}{2}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) - \frac{3}{4}\right)\ln 4 + 4\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_1^y 4^z\, dz = \int_0^t \big(s^8 + 3s\cos(2s)\big)\, ds \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{4^z}{\ln 4}\right]_1^y = \left[\frac{s^9}{9} + \frac{3}{2}s\operatorname{sen}(2s) + \frac{3}{4}\cos(2s)\right]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{4^y}{\ln 4} - \frac{4}{\ln 4} = \frac{t^9}{9} + \frac{3}{2}t\operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{4}\cos(2t) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{7x^2 - x^3 5^x}{x^3} - \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx = 7\int \frac{1}{x}\, dx - \int 5^x\, dx - 2\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = 7\ln|x| - \frac{5^x}{\ln 5} + 2\cot x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando invece il metodo di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (1 - 4x)\operatorname{sen}(3x)\, dx &= \left[(1 - 4x)\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (-4)\frac{\cos(3x)}{3}\, dx \\ &= \frac{1}{3} - \left[\frac{4}{9}\operatorname{sen}(3x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 23/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -3$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

A $-\infty$

B 0^+

C 0^-

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f''(x) > 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

A f è decrescente in $]a, b[$

B f è crescente in $]a, b[$

C f è convessa in $]a, b[$

D f è concava in $]a, b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = te^y + y'(t + 5)$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{7-2x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

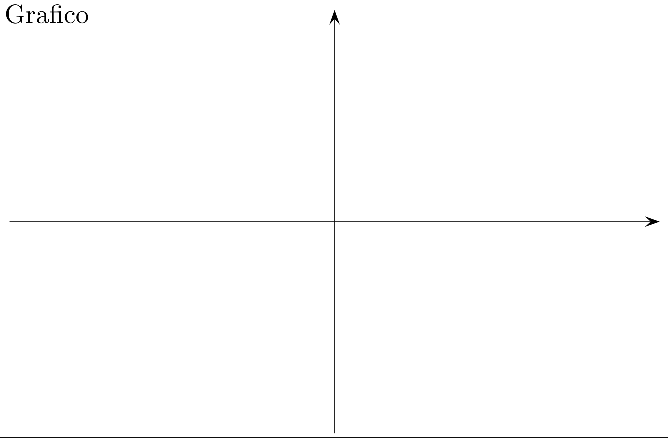
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

7 Enunciare il teorema dei punti critici

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -1$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t \operatorname{sen}(2t^2) + 3t^5}{y\sqrt[3]{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (2t+1)^3$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

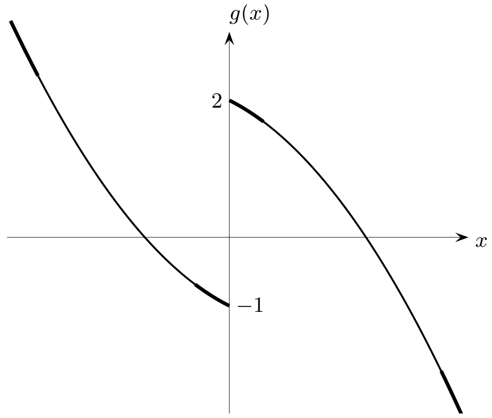
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{2x^2\sqrt{x} - 1}{x^3} + \frac{5}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx, \qquad \int_0^1 \frac{3 - 5x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 23 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ C; $\boxed{\mathbf{3}}$ D; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ cioè $x \neq 1$, $x \neq 3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $2x^2 - 1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/\sqrt{2}$ oppure $x \geq 1/\sqrt{2}$. Il denominatore è positivo se $x^2 - 4x + 3 > 0$ cioè se $x < 1$ oppure $x > 3$. La funzione è dunque positiva per $x < -1/\sqrt{2}$ oppure $1/\sqrt{2} < x < 1$ oppure $x > 3$, negativa per $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ oppure $1 < x < 3$, mentre si annulla in $x = -1/\sqrt{2}$ e $x = 1/\sqrt{2}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1, in 3 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 - 1/x^2}{1 - 4/x + 3/x^2} = \left[\frac{2}{1}\right] = 2,$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\mp}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to 3^\pm} g(x) = \left[\frac{17}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

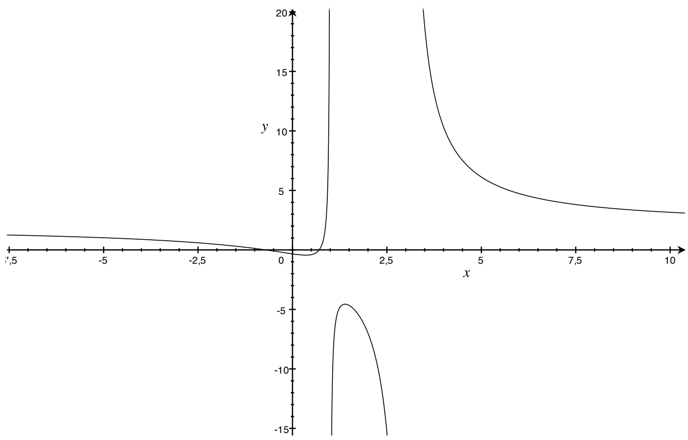
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{4x(x^2 - 4x + 3) - (2x^2 - 1)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 2\frac{-4x^2 + 7x - 2}{(x^2 - 4x + 3)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $-4x^2 + 7x - 2 \geq 0$ cioè se e solo se $\frac{7-\sqrt{17}}{8} \leq x \leq \frac{7+\sqrt{17}}{8}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{8}[\cup]\frac{7+\sqrt{17}}{8}, 3[\cup]3, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{7-\sqrt{17}}{8} \text{ oppure } x = \frac{7+\sqrt{17}}{8}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\frac{7-\sqrt{17}}{8}, 1[\cup]1, \frac{7+\sqrt{17}}{8}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]\frac{7-\sqrt{17}}{8}, 1[$ e in $]1, \frac{7+\sqrt{17}}{8}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{8}[$, in $]\frac{7+\sqrt{17}}{8}, 3[$ e in $]3, +\infty[$. In $x = \frac{7-\sqrt{17}}{8}$ ed $x = \frac{7+\sqrt{17}}{8}$ ammette, rispettivamente, un minimo ed un massimo relativo.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-1) = 1/8$ e $g'(-1) = -13/32$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{13}{32}(x+1) + \frac{1}{8}.$$

10 a) Si ha $y'(t) = 6(2t+1)^2$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$6(2t+1)^2 = \frac{t\,\mathrm{sen}(2t^2) + 3t^5}{(2t+1)^4}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $6 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si osservi che $y\sqrt[3]{y} = y^{4/3}$. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^{4/3}\,dy = \big(t\,\mathrm{sen}(2t^2) + 3t^5\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{4/3}\,dy = \int \big(t\,\mathrm{sen}(2t^2) + 3t^5\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{7/3}}{7/3} = \int t\,\mathrm{sen}(2t^2)\,dt + \frac{3}{6}t^6.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo mediante la seconda tabella

$$\int t\,\mathrm{sen}(2t^2)\,dt = \frac{1}{4}\int 4t\,\mathrm{sen}(2t^2)\,dt = \frac{1}{4}\int (2t^2)'\,\mathrm{sen}(2t^2)\,dt = -\frac{1}{4}\cos(2t^2) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{3}{7}y^{7/3} = -\frac{1}{4}\cos(2t^2) + \frac{3}{6}t^6 + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \Big(-\frac{7}{12}\cos(2t^2) + \frac{7}{6}t^6 + \frac{7c}{3}\Big)^{3/7}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $\frac{3}{7} = -\frac{1}{4} + c$ da cui segue $c = \frac{19}{28}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \Big(-\frac{7}{12}\cos(2t^2) + \frac{7}{6}t^6 + \frac{19}{12}\Big)^{3/7}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^{4/3}\,dz = \int_0^t \big(s\,\mathrm{sen}(2s^2) + 3s^5\big)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{7/3}}{7/3}\right]_1^y = \left[-\frac{1}{4}\cos(2s^2) + \frac{s^6}{2}\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{7}y^{7/3} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{4}\cos(2t^2) + \frac{t^6}{2} + \frac{1}{4}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{2x^2\sqrt{x} - 1}{x^3} + \frac{5}{\mathrm{sen}^2 x}\Big)\,dx = 2\int x^{-1/2}\,dx - \int x^{-3}\,dx + 5\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}\,dx$$

$$= 2\frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{x^{-2}}{-2} - 5\cot x + c = 4\sqrt{x} + \frac{1}{2x^2} - 5\cot x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\int_0^1 \frac{3-5x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$= 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \frac{5}{2}\int_0^1 (4-x^2)'(4-x^2)^{-1/2}\,dx$$

$$= \Big[3\arcsen(x/2) + 5\sqrt{4-x^2}\Big]_0^1 = 3\arcsen\frac{1}{2} + 5\sqrt{3} - 10 = \frac{\pi}{2} + 5\sqrt{3} - 10.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 23/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pi$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B non esiste
- C 0^-
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f
- B x_0 è punto di massimo relativo per f
- C x_0 è punto di critico per f
- D x_0 è punto di flesso per f

3 L'equazione differenziale $y' = \operatorname{sen}(t^2 - 3) - \frac{1}{t}$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x + 7}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (1/5)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico

6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta geometricamente:

7 Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to1^-} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) \text{ non esiste}$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2-6}{x^2+3x+2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{5t - t^2\cos(t^3)}{y^2\sqrt{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (1-7t)^4$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

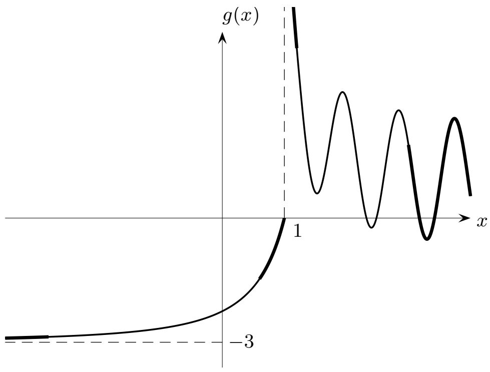
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{3}{1+x^2} - \frac{3x+2x\sqrt[3]{x}}{x^2}\Big)\,dx, \qquad \int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(1-4x^2)\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 23 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ A; $\boxed{\mathbf{2}}$ C; $\boxed{\mathbf{3}}$ A; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $x^2+3x+2 \neq 0$ cioè $x \neq -1$, $x \neq -2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $x^2-6 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -\sqrt{6}$ oppure $x \geq \sqrt{6}$. Il denominatore è positivo se $x^2+3x+2 > 0$ cioè se $x < -2$ oppure $x > -1$. La funzione è dunque positiva per $x < -\sqrt{6}$ oppure $-2 < x < -1$ oppure $x > \sqrt{6}$, negativa per $-\sqrt{6} < x < -2$ oppure $-1 < x < \sqrt{6}$, mentre si annulla in $x = -\sqrt{6}$ e $x = \sqrt{6}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -2, in -1 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-6/x^2}{1+3/x+2/x^2} = \left[\frac{1}{1}\right] = 1,$$

$$\lim_{x\to(-2)^\pm} g(x) = \left[\frac{-2}{0^\mp}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to(-1)^\pm} g(x) = \left[\frac{-5}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

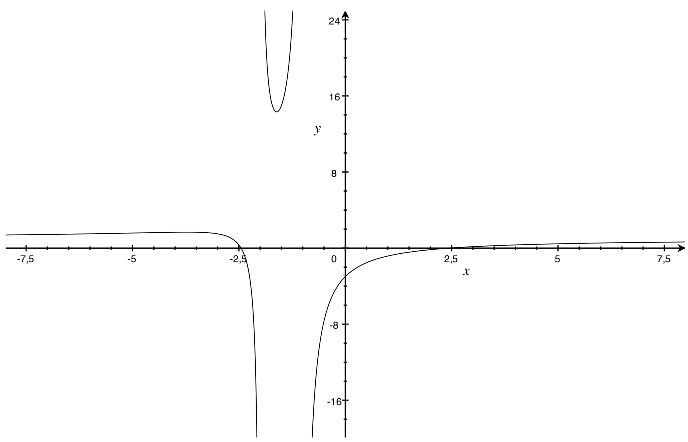
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x(x^2+3x+2)-(x^2-6)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{3x^2+16x+18}{(x^2+3x+2)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $3x^2+16x+18 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq \frac{-8-\sqrt{10}}{3}$ oppure $x \geq \frac{-8+\sqrt{10}}{3}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in \left]\frac{-8-\sqrt{10}}{3}, -2\right[\cup \left]-2, \frac{-8+\sqrt{10}}{3}\right[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{-8-\sqrt{10}}{3} \text{ oppure } x = \frac{-8+\sqrt{10}}{3}, \\ > 0, & \text{se } x \in \left]-\infty, \frac{-8-\sqrt{10}}{3}\right[\cup \left]\frac{-8+\sqrt{10}}{3}, -1\right[\cup \left]-1, +\infty\right[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $\left]-\infty, \frac{-8-\sqrt{10}}{3}\right[$, in $\left]\frac{-8+\sqrt{10}}{3}, -1\right[$ e in $\left]-1, +\infty\right[$, mentre è decrescente in $\left]\frac{-8-\sqrt{10}}{3}, -2\right[$ e in $\left]-2, \frac{-8+\sqrt{10}}{3}\right[$. In $x = \frac{-8+\sqrt{10}}{3}$ ed $x = \frac{-8-\sqrt{10}}{3}$ ammette, rispettivamente, un minimo ed un massimo relativo.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = -1/6$ e $g'(2) = 31/72$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{31}{72}(x-2) - \frac{1}{6}.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ a) Si ha $y'(t) = -28(1-7t)^3$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$-28(1-7t)^3 = \frac{5t - t^2\cos(t^3)}{(1-7t)^{10}}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $-28 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si osservi che $y^2\sqrt{y} = y^{5/2}$. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^{5/2}\,dy = \big(5t - t^2\cos(t^3)\big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{5/2}\,dy = \int \big(5t - t^2\cos(t^3)\big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{7/2}}{7/2} = \frac{5}{2}t^2 - \int t^2\cos(t^3)\,dt.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo mediante la seconda tabella

$$\int t^2\cos(t^3)\,dt = \frac{1}{3}\int 3t^2\cos(t^3)\,dt = \frac{1}{3}\int (t^3)'\cos(t^3)\,dt = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t^3) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{2}{7}y^{7/2} = \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t^3) + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \Big(\frac{35}{4}t^2 - \frac{7}{6}\operatorname{sen}(t^3) + \frac{7c}{2}\Big)^{2/7}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $\frac{2}{7} = c$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \Big(\frac{35}{4}t^2 - \frac{7}{6}\operatorname{sen}(t^3) + 1\Big)^{2/7}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y z^{5/2}\,dz = \int_0^t \big(5s - s^2\cos(s^3)\big)\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{z^{7/2}}{7/2}\Big]_1^y = \Big[\frac{5}{2}s^2 - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(s^3)\Big]_0^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{2}{7} = \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t^3)\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{3}{1+x^2} - \frac{3x + 2x\sqrt[3]{x}}{x^2}\Big)\,dx &= 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx - 3\int \frac{1}{x}\,dx - 2\int x^{-2/3}\,dx \\ &= 3\operatorname{arctg} x - 3\ln|x| - 2\frac{x^{1/3}}{1/3} + c = 3\operatorname{arctg} x - 3\ln|x| - 6\sqrt[3]{x} + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\operatorname{sen}(1-4x^2)\,dx &= -\frac{1}{8}\int_0^\pi (-8x)\operatorname{sen}(1-4x^2)\,dx = -\frac{1}{8}\int_0^\pi (1-4x^2)'\operatorname{sen}(1-4x^2)\,dx \\ &= \Big[\frac{1}{8}\cos(1-4x^2)\Big]_0^\pi = \frac{1}{8}\cos(1-4\pi^2) - \frac{1}{8}\cos 1.\end{aligned}$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 23/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 1
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

- A f è decrescente e concava in $]a, b[$
- B f è decrescente e convessa in $]a, b[$
- C f è crescente e concava in $]a, b[$
- D f è concava e convessa in $]a, b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = t \ln y - 4t^3 y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2-5x}{3-1}$ rappresenta

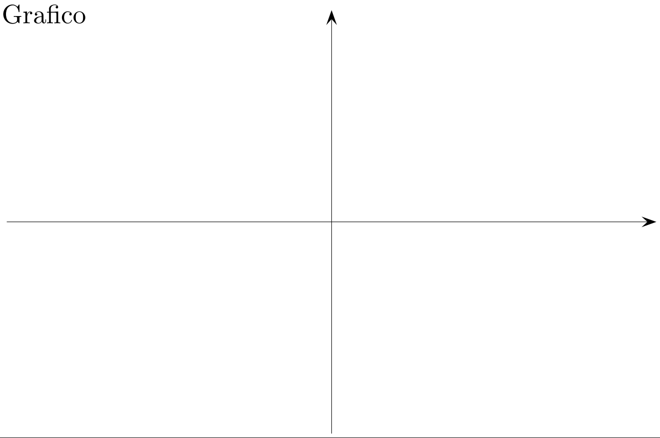
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{1/9} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 L'integrale definito di una funzione positiva f su $[a, b]$ rappresenta:

7 Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 3$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t^3 \operatorname{sen}(t^4) - 3t^2}{y\sqrt[5]{y}} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (4t - 1)^5$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

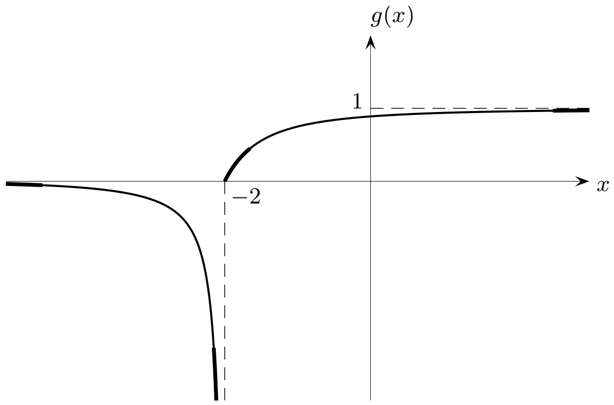
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3x^2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3\cos^2 x} \right) dx, \qquad \int_0^1 \frac{1 + 2x}{3x^2 + 12}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 23 febbraio 2010

1 A; **2** C; **3** D; **4** A; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) La funzione è definita se $x^2 + x - 2 \neq 0$ cioè $x \neq 1$ $x \neq -2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $3x^2 - 1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1/\sqrt{3}$ oppure $x \geq 1/\sqrt{3}$. Il denominatore è positivo se $x^2 + x - 2 > 0$ cioè se $x < -2$ oppure $x > 1$. La funzione è dunque positiva per $x < -2$ oppure $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ oppure $x > 1$, negativa per $-2 < x < 1/\sqrt{3}$ oppure $1/\sqrt{3} < x < 1$, mentre si annulla in $x = -1/\sqrt{3}$ e $x = 1/\sqrt{3}$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 1, in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - 1/x^2}{1 + 1/x - 2/x^2} = \left[\frac{3}{1}\right] = 3,$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{2}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to(-2)^\pm} g(x) = \left[\frac{11}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

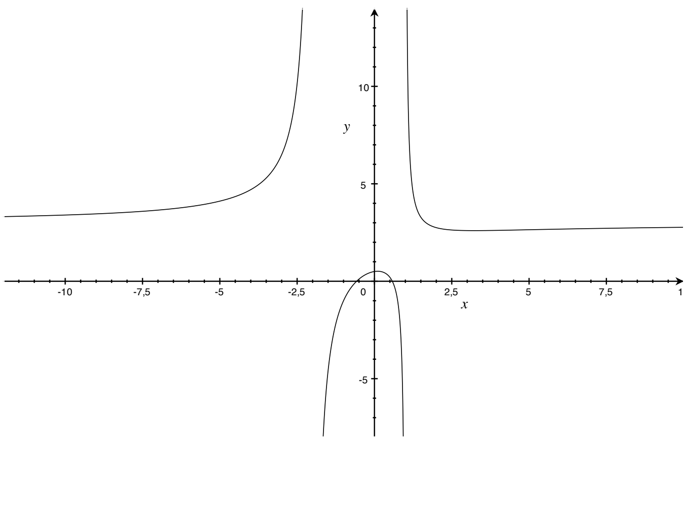
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{6x(x^2 + x - 2) - (3x^2 - 1)(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{3x^2 - 10x + 1}{(x^2 + x - 2)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $3x^2 - 10x + 1 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq \frac{5-\sqrt{22}}{3}$ oppure $x \geq \frac{5+\sqrt{22}}{3}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]-2, \frac{5-\sqrt{22}}{3}[\cup]\frac{5+\sqrt{22}}{3}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{5-\sqrt{22}}{3} \text{ oppure } x = \frac{5+\sqrt{22}}{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]\frac{5-\sqrt{22}}{3}, 1[\cup]1, \frac{5+\sqrt{22}}{3}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]\frac{5-\sqrt{22}}{3}, 1[$ e in $]1, \frac{5+\sqrt{22}}{3}[$, mentre è crescente in $]-\infty, -2[$, in $]-2, \frac{5-\sqrt{22}}{3}[$ e in $]\frac{5+\sqrt{22}}{3}, +\infty[$. In $x = \frac{5+\sqrt{22}}{3}$ ed $x = \frac{5-\sqrt{22}}{3}$ ammette, rispettivamente, un minimo ed un massimo relativo.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(3) = 13/5$ e $g'(3) = -1/50$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{1}{50}(x-3) + \frac{13}{5}.$$

10 a) Si ha $y'(t) = 20(4t-1)^4$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$20(4t-1)^4 = \frac{2t^3 \operatorname{sen}(t^4) - 3t^2}{(4t-1)^6}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $20 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = -1$.

b) Si osservi che $y\sqrt[6]{y} = y^{6/5}$. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^{6/5}\, dy = \big(2t^3 \operatorname{sen}(t^4) - 3t^2\big)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{6/5}\, dy = \int \big(2t^3 \operatorname{sen}(t^4) - 3t^2\big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{11/5}}{11/5} = \int 2t^3 \operatorname{sen}(t^4)\, dt - t^3.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo mediante la seconda tabella

$$\int 2t^3 \operatorname{sen}(t^4)\, dt = \frac{1}{2}\int 4t^3 \operatorname{sen}(t^4)\, dt = \frac{1}{2}\int (t^4)' \operatorname{sen}(t^4)\, dt = -\frac{1}{2}\cos(t^4) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{5}{11}y^{11/5} = -\frac{1}{2}\cos(t^4) - t^3 + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[11]{\Big(-\frac{11}{10}\cos(t^4) - \frac{11}{5}t^3 + \frac{11c}{5}\Big)^5}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = -1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $-\frac{5}{11} = -\frac{1}{2} + c$ da cui segue $c = \frac{1}{22}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[11]{\Big(-\frac{11}{10}\cos(t^4) - \frac{11}{5}t^3 + \frac{1}{10}\Big)^5}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{-1}^{y} z^{6/5}\, dz = \int_0^t \big(2s^3 \operatorname{sen}(s^4) - 3s^2\big)\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{z^{11/5}}{11/5}\Big]_{-1}^{y} = \Big[-\frac{1}{2}\cos(s^4) - s^3\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5}{11}y^{11/5} + \frac{5}{11} = -\frac{1}{2}\cos(t^4) - t^3 + \frac{1}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{3x^2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3\cos^2 x}\Big)\, dx &= 3\int x^{3/2}\, dx - \int x^{-1/6}\, dx - \frac{4}{3}\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \\ &= 3\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{5/6}}{5/6} - \frac{4}{3}\operatorname{tg} x + c = \frac{6}{5}\sqrt{x^5} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{4}{3}\operatorname{tg} x + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1+2x}{3x^2+12}\, dx &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\, dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{6x}{3x^2+12}\, dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\, dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(3x^2+12)'}{3x^2+12}\, dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \ln(3x^2+12)\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \ln 15 - \ln 12\Big).\end{aligned}$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 23/02/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0^+
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \dfrac{y}{\cos t} - t^2$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{3^x + 2}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico

6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{1-x^2}{x^2+5x+6}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^3\cos(t^4) - 2t^3}{y\sqrt[7]{y}} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = (3t-1)^7$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

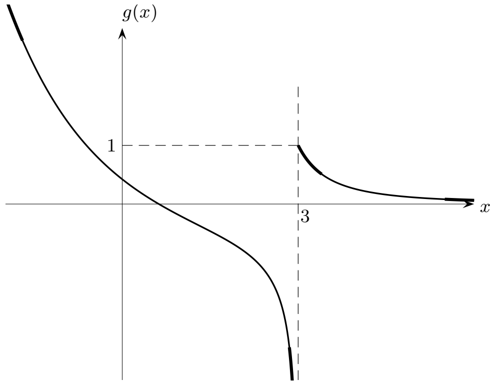
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{3\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx, \qquad \int_0^{\pi} 3x\cos(2x^2+1)\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 23 febbraio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ A; $\boxed{\mathbf{3}}$ A; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $x^2 + 5x + 6 \neq 0$ cioè $x \neq -2$ $x \neq -3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $1 - x^2 \geq 0$ cioè se e solo se $-1 \leq x \leq 1$. Il denominatore è positivo se $x^2 + 5x + 6 > 0$ cioè se $x < -3$ oppure $x > -2$. La funzione è dunque positiva per $-3 < x < 2$ oppure $-1 < x < 1$, negativa per $x < -3$ oppure $-2 < x < -1$ oppure $x > 1$. Si annulla in $x = -1$ e $x = 1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -3, in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1/x^2 - 1}{1 + 5/x + 6/x^2} = \left[\frac{-1}{1}\right] = -1,$$

$$\lim_{x \to (-3)^\pm} g(x) = \left[\frac{-8}{0^\mp}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to (-2)^\pm} g(x) = \left[\frac{-3}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

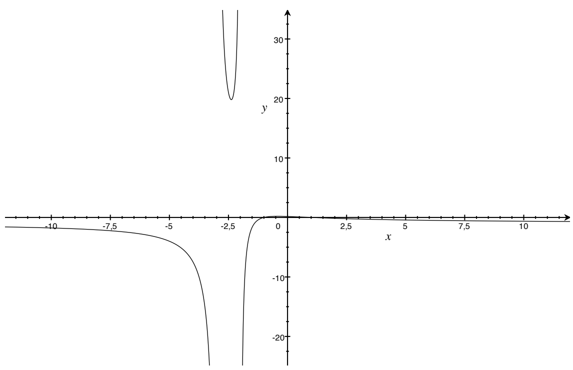
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-2x(x^2 + 5x + 6) - (1 - x^2)(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 6)^2} = -\frac{5x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 5x + 6)^2}.$$

Il numeratore è positivo quando $5x^2 + 14x + 5 \leq 0$ cioè se e solo se $\frac{-7-\sqrt{24}}{5} \leq x \leq \frac{-7+\sqrt{24}}{5}$, il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -3[\cup]-3, \frac{-7-\sqrt{24}}{5}[\cup]\frac{-7+\sqrt{24}}{5}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{-7-\sqrt{24}}{5} \text{ oppure } x = \frac{-7+\sqrt{24}}{5}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\frac{-7-\sqrt{24}}{5}, -2[\cup]-2, \frac{-7+\sqrt{24}}{5}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]\frac{-7-\sqrt{24}}{5}, -2[$ e in $]-2, \frac{-7+\sqrt{24}}{5}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, -3[$, in $]-3, \frac{-7-\sqrt{24}}{5}[$ e in $]\frac{-7+\sqrt{24}}{5}, +\infty[$. In $x = \frac{-7-\sqrt{24}}{5}$ ed $x = \frac{-7+\sqrt{24}}{5}$ ammette, rispettivamente, un minimo ed un massimo relativo.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = 0$ e $g'(1) = -1/6$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -\frac{1}{6}(x - 1).$$

10 a) Si ha $y'(t) = 21(3t - 1)^6$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$21(3t - 1)^6 = \frac{t^3 \cos(t^4) - 2t^3}{(3t - 1)^8}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $21 \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(0) = -1$.

b) Si osservi che $y\sqrt[7]{y} = y^{8/7}$. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^{8/7}\, dy = \big(t^3 \cos(t^4) - 2t^3\big)\, dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int y^{8/7}\, dy = \int \big(t^3 \cos(t^4) - 2t^3\big)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{15/7}}{15/7} = \int t^3 \cos(t^4)\, dt - \frac{t^4}{2}.$$

Il secondo integrale lo calcoliamo mediante la seconda tabella

$$\int t^3 \cos(t^4)\, dt = \frac{1}{4}\int 4t^3 \cos(t^4)\, dt = \frac{1}{4}\int (t^4)' \cos(t^4)\, dt = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(t^4) + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione, perciò si ottiene

$$\frac{7}{15}y^{15/7} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(t^4) - \frac{t^4}{2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[15]{\Big(\frac{15}{28}\operatorname{sen}(t^4) - \frac{15}{14}t^4 + \frac{15c}{7}\Big)^7}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = -1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ricava $-\frac{7}{15} = c$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[15]{\Big(\frac{15}{28}\operatorname{sen}(t^4) - \frac{15}{14}t^4 - 1\Big)^7}$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_{-1}^{y} z^{8/7}\, dz = \int_0^t \big(s^3 \cos(s^4) - 2s^3\big)\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{z^{15/7}}{15/7}\Big]_{-1}^{y} = \Big[\frac{1}{4}\operatorname{sen}(s^4) - \frac{s^4}{2}\Big]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{7}{15}y^{15/7} + \frac{7}{15} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(t^4) - \frac{t^4}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{3\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2}}\Big)\, dx = 3\int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-4/3}\, dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

$$= 3\ln|x| - \frac{x^{-1/3}}{-1/3} - \frac{1}{3}\operatorname{arcsen} x + c = 3\ln|x| + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3}\operatorname{arcsen} x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando anche la seconda tabella si ha

$$\int_0^{\pi} 3x\cos(2x^2 + 1)\, dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} 4x\cos(2x^2 + 1)\, dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi} (2x^2 + 1)' \cos(2x^2 + 1)\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\Big[\operatorname{sen}(2x^2 + 1)\Big]_0^{\pi} = \frac{3}{4}\big(\operatorname{sen}(2\pi^2 + 1) - \operatorname{sen} 1\big).$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 14/07/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

A f è decrescente in $]a,b[$

B f è crescente in $]a,b[$

C f è convessa in $]a,b[$

D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = 2^t y + y' \cos t$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = -\dfrac{3}{5x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

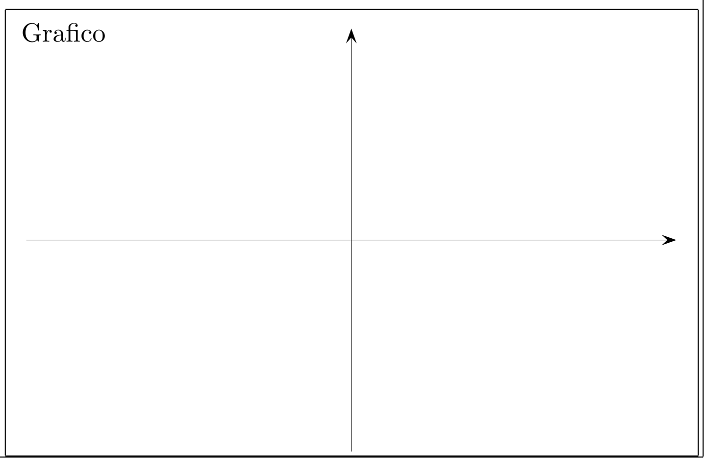
C un'iperbole

D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

7 Descrivere precisamente le relazioni che esistono tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

9 Data la funzione

$$g(x) = 1 + \frac{3x+5}{(x+1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = -2$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^4+1}{y^3t^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2(t-1)}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

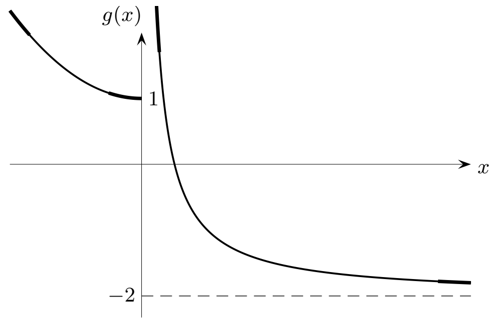
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}} - 4\cos x \right) dx, \qquad \int_0^2 \frac{3x+1}{x^2+4}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 luglio 2010

$\boxed{1}$ D; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ B; $\boxed{4}$ C; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g si può scrivere nella seguente forma

$$g(x) = \frac{x^2+5x+6}{(x+1)^2}.$$

b) Il numeratore è ≥ 0 se $x^2+5x+6 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -3$ oppure $x \geq -2$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. La funzione è dunque positiva per $x < -3$, oppure $-2 < x < -1$ oppure $x > -1$, negativa per $-3 < x < -2$, e si annulla in $x = -2$ oppure $x = -3$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -1 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3/x+5/x^2}{(1+1/x)^2} = \left[1+\frac{0}{1}\right] = 1, \qquad \lim_{x\to-1} g(x) = \left[1+\frac{2}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

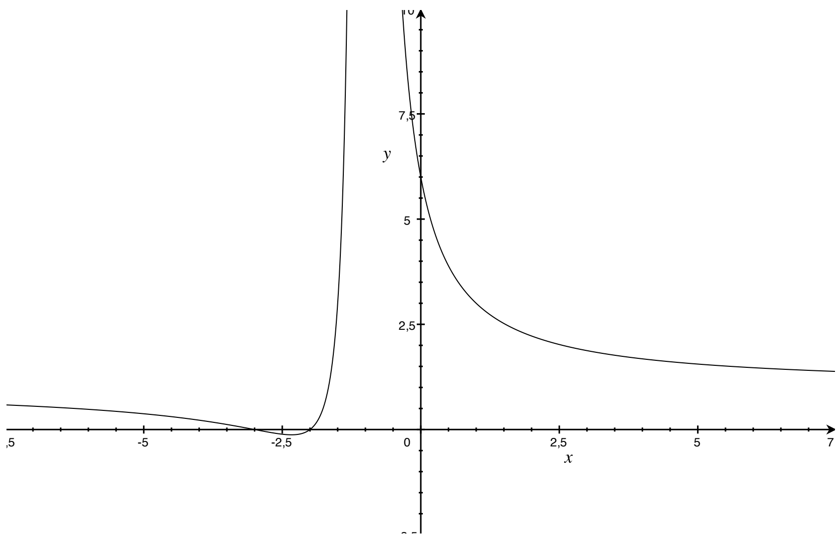
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \Big(\frac{3x+5}{(x+1)^2}\Big)' = \frac{3(x+1)^2-(3x+5)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{3(x+1)-(3x+5)2}{(x+1)^3} = \frac{-(3x+7)}{(x+1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 quando $3x+7 \leq 0$ cioè se e solo se $x \leq -7/3$, il denominatore è positivo se $x+1 > 0$ cioè $x > -1$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty,-7/3[\cup]-1,+\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -7/3, \\ > 0, & \text{se } x \in]-7/3,-1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty,-7/3[$ e in $]-1,+\infty[$, mentre è crescente in $]-7/3,-1[$. In $x = -7/3$ ammette un minimo assoluto.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-2) = 0$ e $g'(-2) = 1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = x + 2.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ a) Si ha $y'(t) = 2\mathrm{e}^{2(t-1)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\mathrm{e}^{2(t-1)} = \frac{2\mathrm{e}^{8(t-1)} + 1}{\mathrm{e}^{6(t-1)}t^3}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $2 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y^3}{2y^4 + 1}\,dy = \frac{1}{t^3}\,dt$$

e ricordando che $1/t^3 = t^{-3}$ e integrando

$$\int \frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = \int t^{-3}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = -\frac{1}{2t^2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Essendo (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{y^3}{2y^4+1}\,dy = \frac{1}{8}\int \frac{8y^3}{2y^4+1}\,dt = \frac{1}{8}\int \frac{(2y^4+1)'}{2y^4+1}\,dt = \frac{1}{8}\ln(2y^4+1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = 1$ si ottiene

$$\frac{1}{8}\ln(2y^4+1) = -\frac{1}{2t^2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(\exp\big(8c - \frac{4}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{8}\ln 3 = -\frac{1}{2} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{2} + \frac{\ln 3}{8}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{2}\Big(3\exp\big(4 - \frac{4}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{z^3}{2z^4+1}\,dz = \int_1^t s^{-3}\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{8}\ln(2z^4+1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{2s^2}\Big]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{8}\ln(2y^4+1) - \frac{1}{8}\ln 3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{1-x}{2\sqrt{x}} - 4\cos x\Big)\,dx &= \frac{1}{2}\int x^{-1/2}\,dx - \frac{1}{2}\int x^{1/2}\,dx - 4\int \cos x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{1}{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} - 4\,\mathrm{sen}\,x + c = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3} - 4\,\mathrm{sen}\,x + c,\end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{3x+1}{x^2+4}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx + = \Big[\frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\Big]_0^2 = \frac{3\ln 2}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 14/07/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f
- B x_0 è punto di massimo relativo per f
- C x_0 è punto di flesso per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = \mathrm{sen}(ty) - 3t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 3$ rappresenta

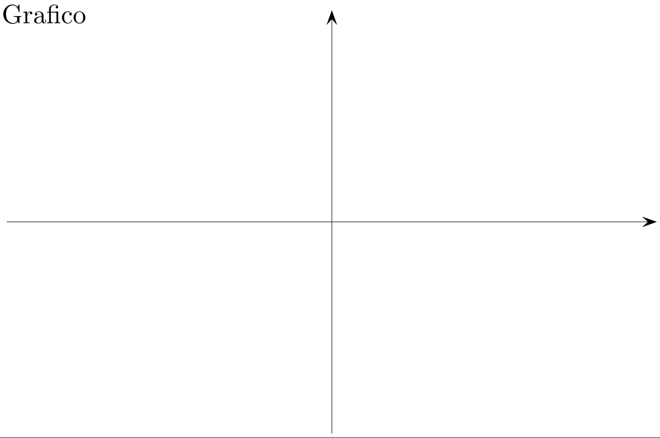
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = (1/5)^x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta geometricamente:

7 Enunciare il teorema dei punti critici

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = 2 - \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^2+1}{yt^3} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = e^{3(t-2)}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

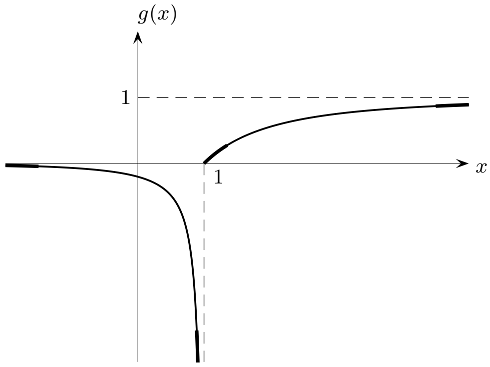
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}+3}{x} + 2\,\mathrm{sen}\, x\Big)\, dx, \qquad \int_0^4 \frac{3-5x}{x^2+16}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 luglio 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ B; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ C; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $x - 2 \neq 0$ cioè $x \neq 2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g si può scrivere nella seguente forma

$$g(x) = \frac{2x^2 - 9x + 9}{(x-2)^2}.$$

b) Il numeratore è ≥ 0 se $2x^2 - 9x + 9 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq 3/2$ oppure $x \geq 3$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. La funzione è dunque positiva per $x < 3/2$ oppure $x > 3$, negativa per $3/2 < x < 3$, $x \neq 2$, e si annulla in $x = 3/2$ oppure $x = 3$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 2 - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x - 1/x^2}{(1-2/x)^2} = \left[2 - \frac{0}{1}\right] = 2, \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = \left[2 - \frac{1}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo.

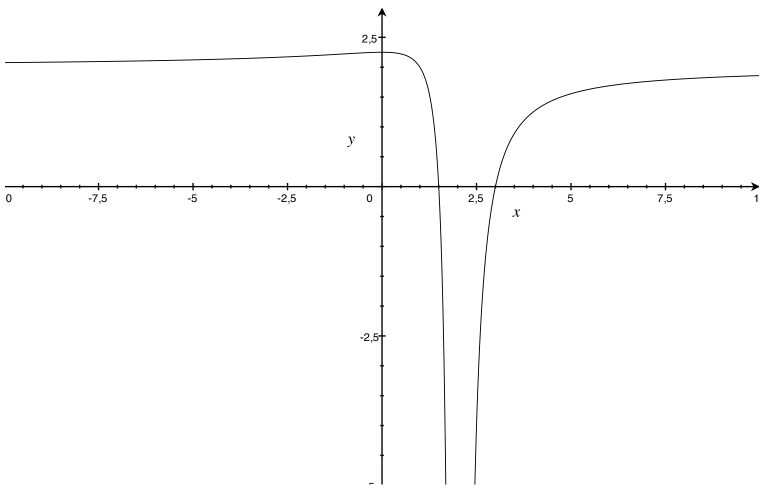
d) La derivata prima è

$$g'(x) = -\Big(\frac{x-1}{(x-2)^2}\Big)' = -\frac{(x-2)^2 - (x-1)2(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{(x-2) - (x-1)2}{(x-2)^3} = \frac{x}{(x-2)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 quando $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x - 2 > 0$ cioè $x > 2$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 2[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]2, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, 2[$. In $x = 0$ ammette un massimo assoluto.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = 2$ e $g'(1) = -1$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -(x - 1) + 2.$$

10 a) Si ha $y'(t) = 3e^{3(t-2)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3e^{3(t-2)} = \frac{2e^{6(t-2)} + 1}{e^{3(t-2)}t^3}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 2$ si ottiene $3 \neq 3/8$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(2) = 1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{2y^2 + 1}\,dy = \frac{1}{t^3}\,dt$$

e ricordando che $1/t^3 = t^{-3}$ e integrando

$$\int \frac{y}{2y^2 + 1}\,dy = \int t^{-3}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y}{2y^2 + 1}\,dy = -\frac{1}{2t^2} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Essendo (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{y}{2y^2 + 1}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{4y}{2y^2 + 1}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{(2y^2 + 1)'}{2y^2 + 1}\,dt = \frac{1}{4}\ln(2y^2 + 1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = 2$ si ottiene

$$\frac{1}{4}\ln(2y^2 + 1) = -\frac{1}{2t^2} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(\exp\big(4c - \frac{2}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(2) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{4}\ln 3 = -\frac{1}{8} + c,$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{8} + \frac{\ln 3}{4}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(3\exp\big(\frac{1}{2} - \frac{2}{t^2}\big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z}{2z^2 + 1}\,dz = \int_2^t s^{-3}\,ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{4}\ln(2z^2 + 1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{2s^2}\Big]_2^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{4}\ln(2y^2 + 1) - \frac{1}{4}\ln 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2t^2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x} + 3}{x} + 2\,\mathrm{sen}\,x\Big)\,dx = \int x^{1/2}\,dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \mathrm{sen}\,x\,dx$$
$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + 3\ln|x| - 2\cos x + c = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 3\ln|x| - 2\cos x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^4 \frac{3 - 5x}{x^2 + 16}\,dx = \int_0^4 \frac{3}{x^2 + 16}\,dx - \frac{5}{2}\int_0^4 \frac{2x}{x^2 + 16}\,dx = \Big[\frac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{4} - \frac{5}{2}\ln(x^2 + 16)\Big]_0^4 = \frac{3\pi}{16} - \frac{5\ln 2}{2}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 14/07/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 3$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x) > 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

A f è decrescente in $]a,b[$

B f è crescente in $]a,b[$

C f è convessa in $]a,b[$

D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y' = y\,\mathrm{tg}(t^2 - 2) - \frac{2}{t}$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2+5}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

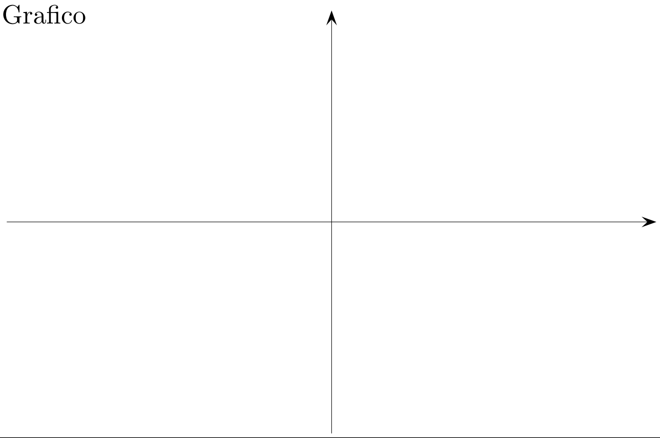
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{4/3} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 L'integrale definito di una funzione positiva f su $[a, b]$ rappresenta:

7 Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$$

9 Data la funzione

$$g(x) = 3 - \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 3$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4y^2+1}{yt^2} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{3(t+1)}$ è soluzione del problema per $t < 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

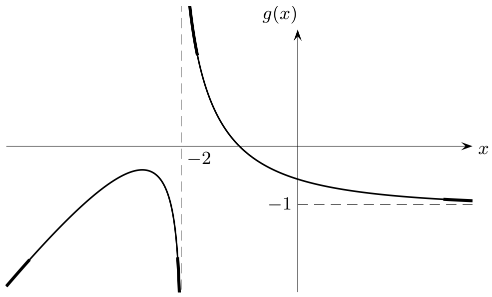
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{x^2+2\sqrt{x}}{x} - 3\,\mathrm{sen}\,x\Big)\,dx, \qquad \int_0^3 \frac{2-3x}{x^2+9}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 luglio 2010

$\boxed{1}$ A; $\boxed{2}$ C; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ B; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x - 1 \neq 0$ cioè $x \neq 1$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g si può scrivere nella seguente forma

$$g(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{(x-1)^2}.$$

b) Il numeratore è ≥ 0 se $3x^2 - 8x + 4 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq 2/3$ oppure $x \geq 2$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. La funzione è dunque positiva per $x < 2/3$ oppure $x > 2$, negativa per $2/3 < x < 2$, $x \neq 1$, e si annulla in $x = 2/3$ oppure $x = 2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -1 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 3 - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2/x - 1/x^2}{(1-1/x)^2} = \left[3 - \frac{0}{1}\right] = 3, \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = \left[3 - \frac{1}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo.

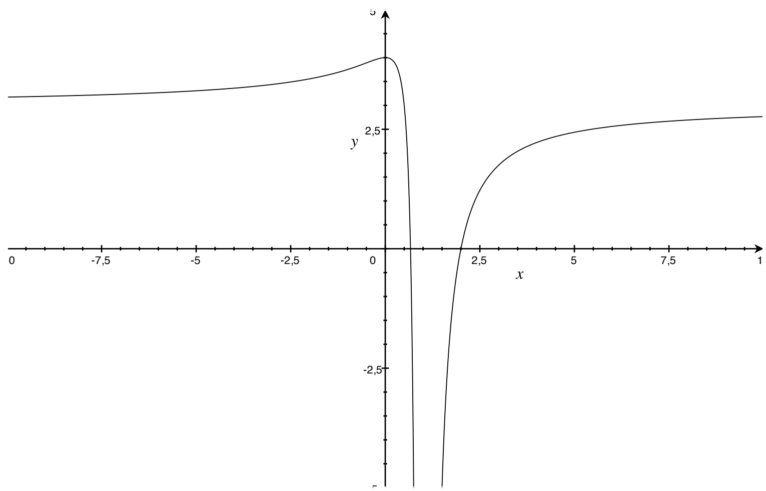
d) La derivata prima è

$$g'(x) = -\Big(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\Big)' = -\frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2(x-1) - (2x-1)2}{(x-1)^3} = \frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 quando $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x - 1 > 0$ cioè $x > 1$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]1, +\infty[$, mentre è decrescente in $]0, 1[$. In $x = 0$ ammette un massimo assoluto.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(3) = 7/4$ e $g'(3) = 3/4$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{3}{4}(x - 3) + \frac{7}{4}.$$

10 a) Si ha $y'(t) = 3e^{3(t+1)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3e^{3(t+1)} = \frac{4e^{6(t+1)} + 1}{e^{3(t+1)}t^2}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t < 0$ (ad esempio, per $t = -1$ si ottiene $3 \neq 5$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(-1) = 1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y}{4y^2 + 1}\, dy = \frac{1}{t^2}\, dt$$

e ricordando che $1/t^2 = t^{-2}$ e integrando

$$\int \frac{y}{4y^2 + 1}\, dy = \int t^{-2}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y}{4y^2 + 1}\, dy = -\frac{1}{t} + c.$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Essendo (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{y}{4y^2 + 1}\, dy = \frac{1}{8}\int \frac{8y}{4y^2 + 1}\, dt = \frac{1}{8}\int \frac{(4y^2 + 1)'}{4y^2 + 1}\, dt = \frac{1}{8}\ln(4y^2 + 1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = -1$ si ottiene

$$\frac{1}{8}\ln(4y^2 + 1) = -\frac{1}{t} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{1}{4}\Big(\exp\big(8c - \frac{8}{t}\big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(-1) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{8}\ln 5 = 1 + c,$$

da cui si ricava $c = -1 + \frac{\ln 5}{8}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{4}\Big(5\exp\big(-8 - \frac{8}{t}\big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z}{4z^2 + 1}\, dz = \int_{-1}^t s^{-2}\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{8}\ln(4z^2 + 1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{s}\Big]_{-1}^t$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{8}\ln(4y^2 + 1) - \frac{1}{8}\ln 5 = -\frac{1}{t} - 1$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{x} - 3\,\mathrm{sen}\, x\Big)\, dx = \int x\, dx + 2\int x^{-1/2}\, dx - 3\int \mathrm{sen}\, x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + 3\cos x + c = \frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} + 3\cos x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^3 \frac{2 - 3x}{x^2 + 9}\, dx = \int_0^3 \frac{2}{x^2 + 9}\, dx - \frac{3}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 9}\, dx = \Big[\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\ln(x^2 + 9)\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6} - \frac{3\ln 2}{2}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 14/07/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^-$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a, b[$ e vale $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora

A f è decrescente e concava in $]a, b[$

B f è decrescente e convessa in $]a, b[$

C f è crescente e concava in $]a, b[$

D f è concava e convessa in $]a, b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = (t + 2)e^y - 5y'$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = 3x^3 - 5x + 1$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

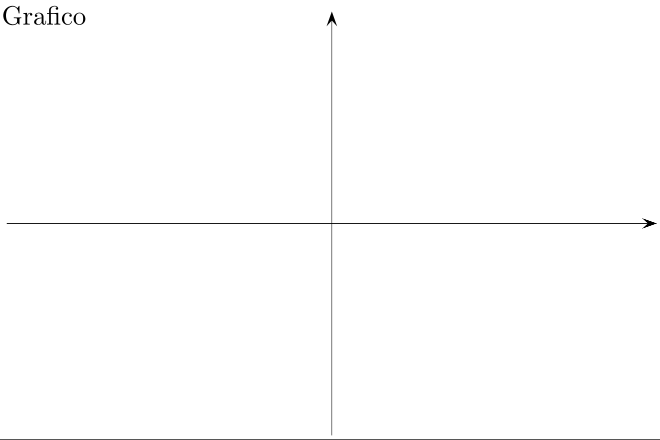
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = -1 + \frac{x-1}{(x-3)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3y^4+1}{y^3t^2} \\ y(-2) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2(t+2)}$ è soluzione del problema per $t < 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

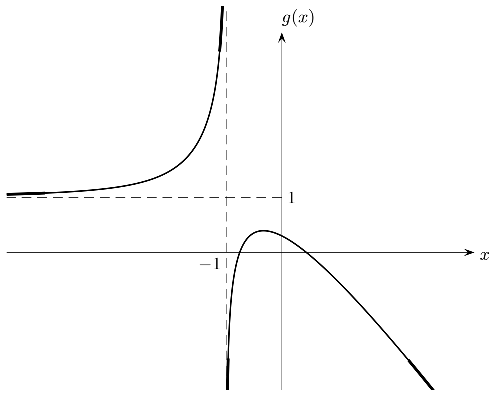
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{x^2-2}{\sqrt{x}} + 5\cos x\Big)\,dx, \qquad \int_0^5 \frac{x-2}{x^2+25}\,dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 14 luglio 2010

$\boxed{1}$ A; $\boxed{2}$ A; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $x - 3 \neq 0$ cioè $x \neq 3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g si può scrivere nella seguente forma

$$g(x) = \frac{-x^2 + 7x - 10}{(x-3)^2}.$$

b) Il numeratore è ≥ 0 se $-x^2 + 7x + 10 \geq 0$ cioè se e solo se $2 \leq x \leq 5$, il denominatore è sempre positivo nel dominio. La funzione è dunque positiva per $2 < x < 5$ e $x \neq 3$, negativa per $x < 2$ oppure $x > 5$, e si annulla in $x = 2$ oppure $x = 5$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in 3 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x - 1/x^2}{(1-3/x)^2} = \left[-1 + \frac{0}{1}\right] = -1, \qquad \lim_{x\to 3} g(x) = \left[-1 + \frac{2}{0^+}\right] = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

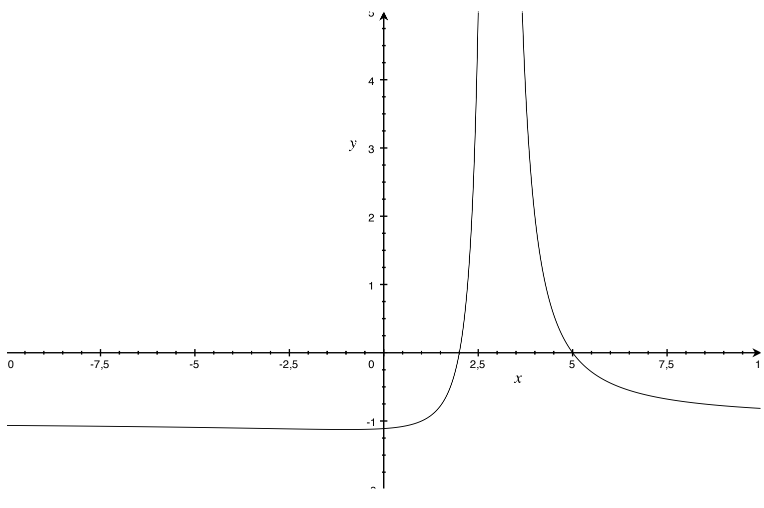
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \Big(\frac{x-1}{(x-3)^2}\Big)' = \frac{(x-3)^2 - (x-1)2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{(x-3) - (x-1)2}{(x-3)^3} = \frac{-(x+1)}{(x-3)^3}.$$

Il numeratore è ≥ 0 quando $x + 1 \leq 0$ cioè se e solo se $x \leq -1$, il denominatore è positivo se $x - 3 > 0$ cioè $x > 3$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -1, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1, 3[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -1[$ e in $]3, +\infty[$, mentre è crescente in $]-1, 3[$. In $x = -1$ ammette un minimo assoluto.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(0) = -10/9$ e $g'(0) = 1/27$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{1}{27}x - \frac{10}{9}.$$

10 a) Si ha $y'(t) = 2\mathrm{e}^{2(t+2)}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\mathrm{e}^{2(t+2)} = \frac{3\mathrm{e}^{8(t+2)} + 1}{\mathrm{e}^{6(t+2)}t^2}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t < 0$ (ad esempio, per $t = -2$ si ottiene $2 \neq 1$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(-2) = 1$.
b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{y^3}{3y^4 + 1}\,dy = \frac{1}{t^2}\,dt$$

e ricordando che $1/t^2 = t^{-2}$ e integrando

$$\int \frac{y^3}{3y^4 + 1}\,dy = \int t^{-2}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{y^3}{3y^4 + 1}\,dy = -\frac{1}{t} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Essendo (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{y^3}{3y^4 + 1}\,dy = \frac{1}{12}\int \frac{12y^3}{3y^4 + 1}\,dt = \frac{1}{12}\int \frac{(3y^4 + 1)'}{3y^4 + 1}\,dt = \frac{1}{12}\ln(3y^4 + 1),$$

e poiché $y(t)$ è positiva vicino a $t = -2$ si ottiene

$$\frac{1}{12}\ln(3y^4 + 1) = -\frac{1}{t} + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt[4]{\frac{1}{3}\Big(\exp\big(12c - \frac{12}{t}\big) - 1\Big)}.$$

Imponendo la condizione $y(-2) = 1$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha

$$\frac{1}{12}\ln 4 = \frac{1}{2} + c,$$

da cui si ricava $c = -\frac{1}{2} + \frac{\ln 4}{12}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{3}\Big(4\exp\big(-6 - \frac{4}{t}\big) - 1\Big)}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{z^3}{3z^4 + 1}\,dz = \int_{-2}^t s^{-2}\,ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{12}\ln(3z^4 + 1)\Big]_1^y = \Big[-\frac{1}{s}\Big]_{-2}^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{12}\ln(3y^4 + 1) - \frac{1}{12}\ln 4 = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{x^2 - 2}{\sqrt{x}} + 5\cos x\Big)\,dx = \int x^{3/2}\,dx - 2\int x^{-1/2}\,dx + 5\int \cos x\,dx$$
$$= \frac{x^{5/2}}{5/2} - 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + 5\,\mathrm{sen}\,x + c = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 5\,\mathrm{sen}\,x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^5 \frac{x - 2}{x^2 + 25}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2x}{x^2 + 25}\,dx - \int_0^5 \frac{2}{x^2 + 25}\,dx = \Big[\frac{1}{2}\ln(x^2 + 25) - \frac{2}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{5}\Big]_0^5 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{10}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 01/09/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x))$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C non esiste
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ per $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è punto di minimo relativo per f
- B x_0 è punto di massimo relativo per f
- C x_0 è punto critico per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = 5t - t \ln y$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{\pi}{e}$ rappresenta

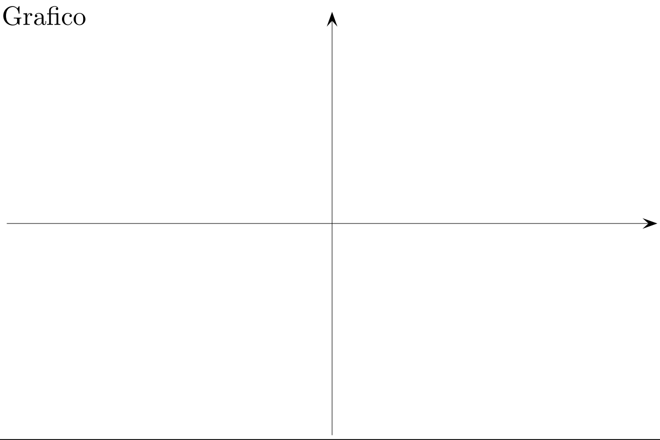
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $]a, b[$ è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y - t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \sqrt{t^2+1}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

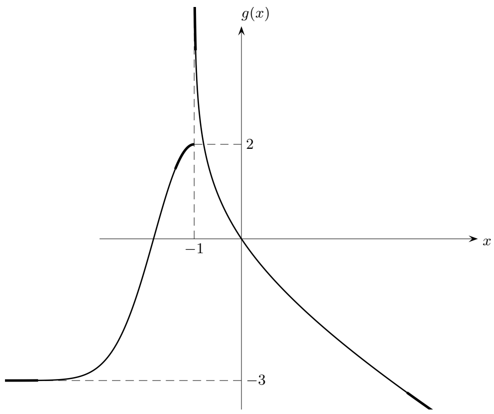
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{4x^5+3}{x^2} - \frac{5}{x^2+1}\right) dx, \qquad \int_0^1 (2x-x^2)\mathrm{e}^{-2x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 1 settembre 2010

$\boxed{1}$ A; $\boxed{2}$ C; $\boxed{3}$ C; $\boxed{4}$ A; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita se $1-2x \neq 0$ cioè $x \neq 1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è sempre positivo dunque la funzione è positiva per $x < 1/2$, negativa per $x > 1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(1/2)^{\pm}} g(x) = \left[\frac{\mathrm{e}}{0^{\mp}}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo, mentre, utilizzando il limite fondamentale $\lim_{z\to+\infty} \mathrm{e}^z/z = +\infty$ (oppure, alternativamente, il teorema di de L'Hôpital) si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x/x}{1/x-2} = \left[\frac{+\infty}{-2}\right] = -\infty.$$

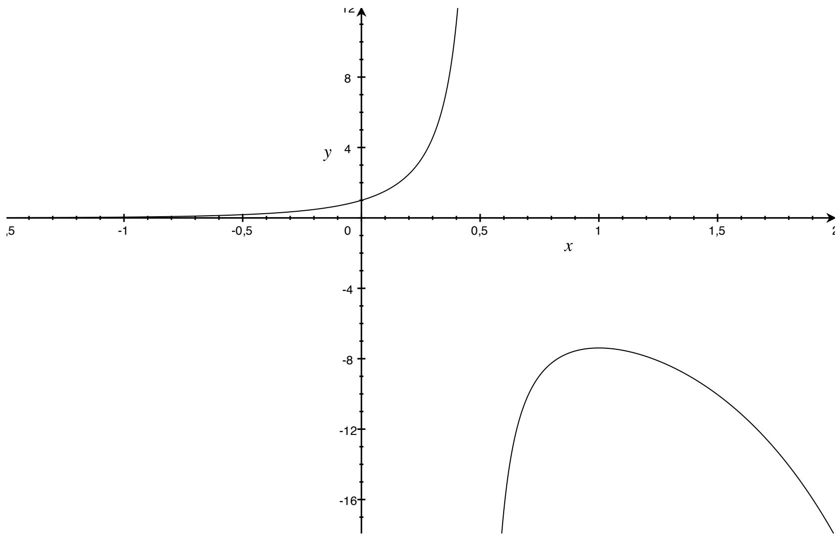
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}(1-2x) - \mathrm{e}^{2x}(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{4\mathrm{e}^{2x}(1-x)}{(2x-1)^2}.$$

Poiché i fattori e^{2x} e $(2x-1)^2$ sono sempre positivi nel dominio si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} <0, & \text{se } x \in]1,+\infty[, \\ =0, & \text{se } x = 1, \\ >0, & \text{se } x \in]-\infty,1/2[\cup]1/2,1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]1,+\infty[$, mentre è crescente in $]-\infty,1/2[$ e in $]1/2,1[$. In $x=1$ ammette un massimo relativo.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = 4\frac{\big[2e^{2x}(1-x) - e^{2x}\big](2x-1)^2 - e^{2x}(1-x)2(2x-1)2}{(2x-1)^4}$$
$$= 4\frac{\big[2e^{2x}(1-x) - e^{2x}\big](2x-1) - e^{2x}(1-x)4}{(2x-1)^3} = \frac{4e^{2x}(4x^2-8x-5)}{(1-2x)^3}.$$

Poiché il polinomio $4x^2-8x-5$ è sempre positivo, la derivata seconda è positiva se e solo se $(1-2x)^3 > 0$ cioè $x < 1/2$. In definitiva $g''(x) > 0$ se $x \in]-\infty, 1/2[$ e $g''(x) < 0$ se $x \in]1/2, +\infty[$ perciò la funzione è convessa in $]-\infty, 1/2[$, mentre è concava in $]1/2, +\infty[$.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}2t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = 2\sqrt{t^2+1} - t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq 2$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 2t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$y(t) = e^{2t} \int e^{-2t}(-t^2)\, dt = e^{2t}\left(\frac{e^{-2t}}{-2}(-t^2) - \int e^{-2t} t\, dt\right) = e^{2t}\left(\frac{e^{-2t}}{2}t^2 - \Big(\frac{e^{-2t}}{-2}t - \int \frac{e^{-2t}}{-2}\, dt\Big)\right)$$
$$= e^{2t}\left(\frac{e^{-2t}}{2}t^2 + \frac{e^{-2t}}{2}t + \frac{e^{-2t}}{4} + c\right) = c\, e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4},$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $1 = c + 1/4$ cioè $c = 3/4$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = e^{A(t)}\left(\int_0^t e^{-A(s)} b(s)\, ds + 1\right)$$

dove $A(t) = \int_0^t a(s)\, ds$. In questo caso $A(t) = 2t$ e

$$y(t) = e^{2t}\left(\int_0^t e^{-2s}(-s^2)\, ds + 1\right) = e^{2t}\left(\frac{e^{-2t}}{2}t^2 + \frac{e^{-2t}}{2}t + \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.$$

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{4x^5+3}{x^2} - \frac{5}{x^2+1}\Big)\, dx = 4\int x^3\, dx + 3\int x^{-2}\, dx - 5\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$
$$= x^4 + 3\frac{x^{-1}}{-1} - 5 \operatorname{arctg} x + c = x^4 - \frac{3}{x} - 5 \operatorname{arctg} x + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando il metodo per parti due volte di seguito si ha

$$\int_0^1 (2x - x^2)e^{-2x}\, dx = \Big[(2x-x^2)\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^1 - \int_0^1 (2-2x)\frac{e^{-2x}}{-2}\, dx = -\frac{e^{-2}}{2} + \int_0^1 (1-x)e^{-2x}\, dx$$
$$= -\frac{e^{-2}}{2} + \Big[(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^1 - \int_0^1 (-1)\frac{e^{-2x}}{-2}\, dx = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} - \Big[\frac{e^{-2x}}{-4}\Big]_0^1 = \frac{e^2-1}{4e^2}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 01/09/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea *VIT* *STAL*	Matricola
Vecchio ordinamento *SI* *NO*	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

A $-\infty$

B $+\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

A f è decrescente in $]a,b[$

B f è crescente in $]a,b[$

C f è convessa in $]a,b[$

D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y'' = 2^t y + y' \cos t$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = -\dfrac{3}{5x}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

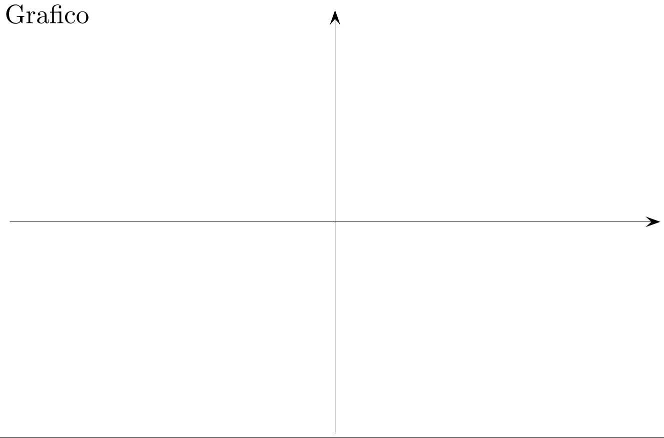
D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in x_0 è:

7 Descrivere con precisione le relazioni che intercorrono tra la derivata di una funzione e le sue proprietà di monotonia.

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = 3 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{2x+1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y + 2t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \sqrt{t^4+1}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

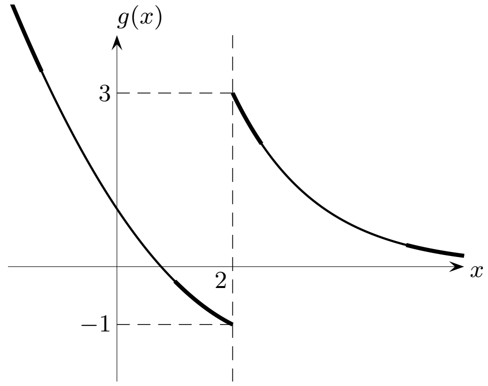
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x^2-1}{x^3} \Big)\, dx, \qquad \int_0^1 (2x^2 - x)\mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 1 settembre 2010

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ B; $\boxed{\mathbf{3}}$ B; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita se $2x+1 \neq 0$ cioè $x \neq -1/2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è sempre positivo dunque la funzione è positiva per $x > -1/2$, negativa per $x < -1/2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in $-1/2$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to(-1/2)^\pm} g(x) = \left[\frac{\mathrm{e}^{3/2}}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo, mentre, utilizzando il limite fondamentale $\lim_{z\to+\infty} \mathrm{e}^z/z = +\infty$ (oppure, alternativamente, il teorema di de L'Hôpital) si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3x}/(-3x)}{-2/3 - 1/(3x)} = \left[\frac{+\infty}{-2/3}\right] = -\infty.$$

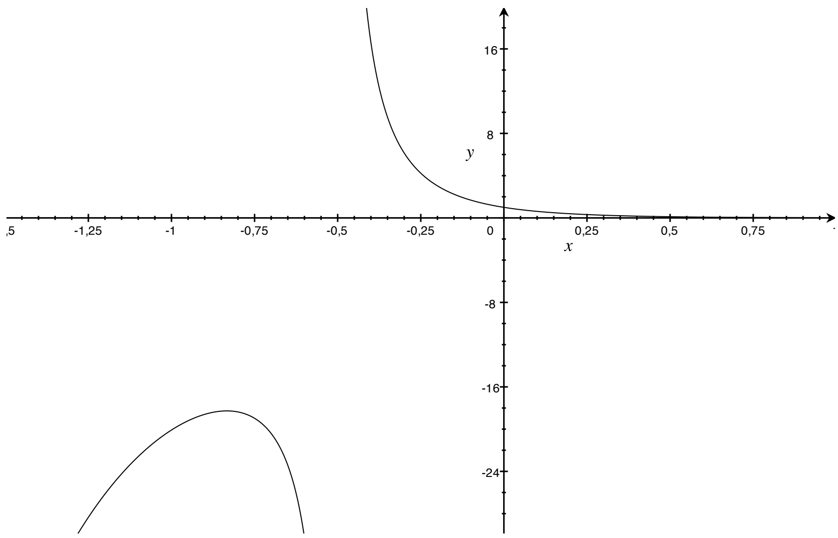
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(-3)\mathrm{e}^{-3x}(2x+1) - \mathrm{e}^{-3x}2}{(2x+1)^2} = \frac{-\mathrm{e}^{-3x}(6x+5)}{(2x+1)^2}.$$

Poiché i fattori e^{-3x} e $(2x+1)^2$ sono sempre positivi nel dominio si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-5/6, -1/2[\cup]-1/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -5/6, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -5/6[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-5/6, -1/2[$ e in $]-1/2, +\infty[$, mentre è crescente in $]-\infty, -5/6[$. In $x = -5/6$ ammette un massimo relativo.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = -\frac{\big[(-3)e^{-3x}(6x+5)+e^{-3x}6\big](2x+1)^2 - e^{-3x}(6x+5)2(2x+1)2}{(2x+11)^4}$$
$$= -\frac{\big[(-3)e^{-3x}(6x+5)+e^{-3x}6\big](2x+1) - e^{-3x}(6x+5)4}{(2x+1)^3} = \frac{e^{-3x}(36x^2+60x+29)}{(2x+1)^3}.$$

Poiché il polinomio $36x^2 + 60x + 29$ è sempre positivo, la derivata seconda è positiva se e solo se $(2x+1)^3 > 0$ cioè $x > -1/2$. In definitiva $g''(x) > 0$ se $x \in]-1/2, +\infty[$ e $g''(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -1/2[$ perciò la funzione è convessa in $]-1/2, +\infty[$, mentre è concava in $]-\infty, -1/2[$.

10 a) Si ha $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^4+1}}4t^3 = \frac{2t^3}{\sqrt{t^4+1}}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{2t^3}{\sqrt{t^4+1}} = 3\sqrt{t^4+1} + 2t^2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ha $0 \neq 3$). La funzione non è dunque soluzione. La funzione soddisfa invece la seconda condizione, essendo $y(0) = 1$.

b) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso $A(t) = 3t$ e integrando per parti due volte si ottiene

$$y(t) = e^{3t}\int e^{-3t}2t^2\,dt = e^{3t}\Big(\frac{e^{-3t}}{-3}2t^2 - \int \frac{e^{-3t}}{-3}4t\,dt\Big) = e^{3t}\Bigg(-e^{-3t}\frac{2t^2}{3} + \frac{4}{3}\Big(\frac{e^{-3t}}{-3}t - \int\frac{e^{-3t}}{-3}\,dt\Big)\Bigg)$$
$$= e^{3t}\Bigg(-e^{-3t}\frac{2t^2}{3} - e^{-3t}\frac{4t}{9} - \frac{4}{27}e^{-3t} + c\Bigg) = c\,e^{3t} - \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{4}{27},$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $1 = c - 4/27$ cioè $c = 31/27$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{31}{27}e^{3t} - \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = e^{A(t)}\left(\int_0^t e^{-A(s)}b(s)\,ds + 1\right)$$

dove $A(t) = \int_0^t a(s)\,ds$. In questo caso $A(t) = 3t$ e

$$y(t) = e^{3t}\left(\int_0^t e^{-3s}2s^2\,ds + 1\right) = e^{3t}\left(-\Big(\frac{2t^2}{3} + \frac{4t}{9} + \frac{4}{27}\Big)e^{-3t} + \frac{4}{27} + 1\right) = \frac{31}{27}e^{3t} - \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{4}{27}.$$

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int\Big(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x^2-1}{x^3}\Big)\,dx = 2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 3\int\frac{1}{x}\,dx - \int x^{-3}\,dx$$
$$= 2\,\mathrm{arcsen}\,x + 3\ln|x| - \frac{x^{-2}}{-2} + c = 2\,\mathrm{arcsen}\,x + 3\ln|x| + \frac{1}{2x^2} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando il metodo per parti due volte di seguito si ha

$$\int_0^1 (2x^2-x)e^{-x}\,dx = \Big[(2x^2-x)(-e^{-x})\Big]_0^1 - \int_0^1(4x-1)(-e^{-x})\,dx = -e^{-1} + \int_0^1 (4x-1)e^{-x}\,dx$$
$$= -e^{-1} + \Big[(4x-1)(-e^{-x})\Big]_0^1 - \int_0^1 4(-e^{-x})\,dx = -e^{-1} + (-3e^{-1} - 1) + \Big[-4e^{-x}\Big]_0^1 = \frac{3e-8}{e}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 17/09/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a, b[$ e vale $f'(x_0) > 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = \frac{t}{y} + 3y'$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

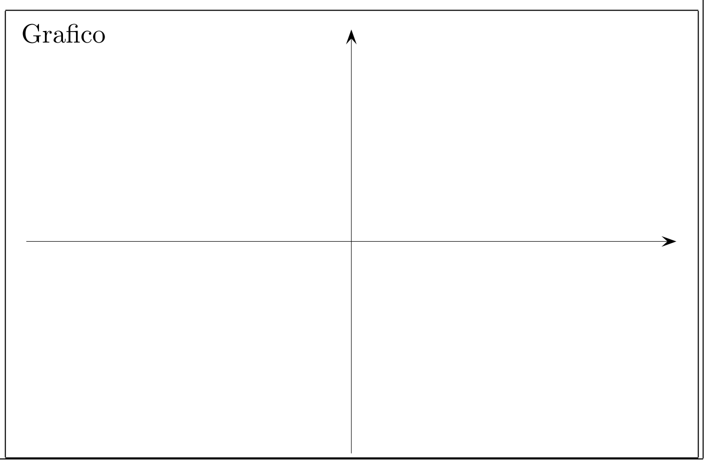
4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \cos x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$



6 Per definizione, la derivata di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{-2x^2}{x^4+1}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 2$; f) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y(t^2+2)}{t \ln y} \\ y(1) = \mathrm{e} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2t-1}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

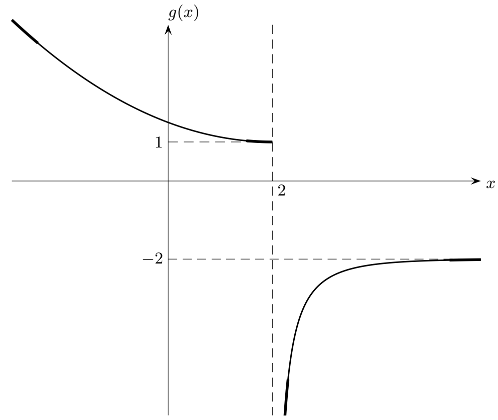
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \Big(\frac{3 - 2x^5 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + 3^x \Big)\, dx, \qquad \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 17 settembre 2010

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ D; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) Poiché il denominatore è sempre strettamente positivo, la funzione è sempre definita dunque $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Essendo razionale è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g è funzione pari quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, dunque basterebbe studiarlo per $x \geq 0$.

b) Il denominatore è sempre positivo, il numeratore è negativo tranne che in $x = 0$, dunque la funzione è sempre negativa e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{x^2 + 1/x^2} = \left[\frac{-2}{+\infty}\right] = 0.$$

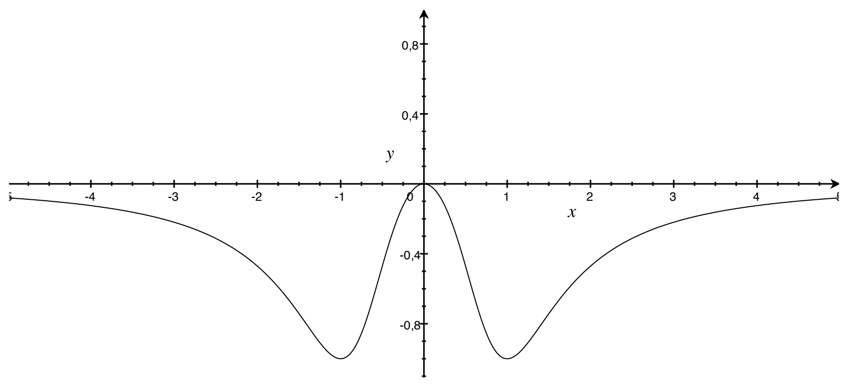
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-4x(x^4+1) + 2x^2 4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{4x^5 - 4x}{(x^4+1)^2} = \frac{4x(x^4-1)}{(x^4+1)^2}.$$

Poiché $x^4 - 1 \geq 0$ se e solo se $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$, il numeratore è positivo per $-1 < x < 0$ oppure $x > 1$, mentre il denominatore è sempre positivo. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[, \\ = 0, & \text{se } x = -1 \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = 1, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è decrescente in $]-\infty, -1[$ e in $]0, 1[$, mentre è crescente in $]-1, 0[$ e in $]1, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un massimo assoluto mentre in $x = -1$ e $x = 1$ ammette due minimi assoluti.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(2) = -\frac{8}{17}$ e $g'(2) = \frac{120}{289}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{120}{289}(x-2) - \frac{8}{17}.$$

f) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= 4\frac{(5x^4-1)(x^4+1)^2 - (x^5-x)2(x^4+1)4x^3}{(x^4+1)^4} \\ &= 4\frac{(5x^4-1)(x^4+1) - (x^5-x)8x^3}{(x^4+1)^3} = \frac{4(-3x^8+12x^4-1)}{(x^4+1)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $-3x^8+12x^4-1 \geq 0$ ovvero $3x^8 - 12x^4 + 1 \leq 0$. Quest'ultima è riconducibile ad una disequazione di secondo grado: posto $z = x^4$ si ottiene $3z^2 - 12z + 1 \leq 0$, le cui soluzioni sono date da $\frac{6-\sqrt{33}}{3} \leq z \leq \frac{6+\sqrt{33}}{3}$. Nella variabile x si ottiene dunque $\frac{6-\sqrt{33}}{3} \leq x^4 \leq \frac{6+\sqrt{33}}{3}$ che è verificata se e solo se $\sqrt[4]{\frac{6-\sqrt{33}}{3}} \leq x \leq \sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{33}}{3}}$ oppure $-\sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{33}}{3}} \leq x \leq -\sqrt[4]{\frac{6-\sqrt{33}}{3}}$. Posto $x_1 = \sqrt[4]{\frac{6-\sqrt{33}}{3}}$ e $x_2 = \sqrt[4]{\frac{6+\sqrt{33}}{3}}$ si ottiene che la funzione è convessa in $]-x_2, -x_1[$ e in $]x_1, x_2[$, mentre è concava in $]-\infty, -x_2[$, in $]-x_1, x_1[$ e in $]x_2, +\infty[$. In $x = -x_1$, $x = -x_2$, $x = x_1$ e $x = x_2$ ammette dei punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 2\mathrm{e}^{2t-1}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$2\mathrm{e}^{2t-1} = \frac{\mathrm{e}^{2t-1}(t^2+2)}{t \ln \mathrm{e}^{2t-1}} = \frac{\mathrm{e}^{2t-1}(t^2+2)}{t(2t-1)}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $2\mathrm{e} \neq 3\mathrm{e}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1) = \mathrm{e}$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln y}{y}\,dy = \frac{t^2+2}{t}\,dt = \Big(t + \frac{2}{t}\Big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{\ln y}{y}\,dy = \int \Big(t + \frac{2}{t}\Big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln^2 y = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo nell'incognita y si ottiene

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = \frac{t^2}{2} + 2\ln t + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \exp\sqrt{t^2 + 4\ln t + 2c}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = \mathrm{e}$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c$, da cui si ricava $c = 0$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\sqrt{t^2 + 4\ln t}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\ln z}{z}\,dz = \int_1^t \Big(s + \frac{2}{s}\Big)\,ds \quad &\Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{2}\ln^2 z\Big]_{\mathrm{e}}^{y} = \Big[\frac{s^2}{2} + 2\ln s\Big]_1^t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln^2 y - \frac{1}{2} = \frac{t^2}{2} + 2\ln t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\begin{aligned} \int \Big(\frac{3 - 2x^5 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + 3^x\Big)\,dx &= 3\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx - 2\int x^5\,dx + \int 3^x\,dx \\ &= -3\cot x - \frac{x^6}{3} + \frac{3^x}{\ln 3} + c, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{6x}{\sqrt{3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^2 (3x^2+4)^{-1/2}(3x^2+4)'\,dx = \frac{1}{6}\Big[\frac{(3x^2+4)^{1/2}}{1/2}\Big]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 17/09/2010
A.A. 2009/2010

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -2$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora

- A f è crescente in $]a,b[$
- B f è convessa in $]a,b[$
- C f è decrescente in $]a,b[$
- D f è concava in $]a,b[$

3 L'equazione differenziale $y' = \text{sen}(3t + 5y)$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1 - \pi x}{e^2 x + 5}$ rappresenta

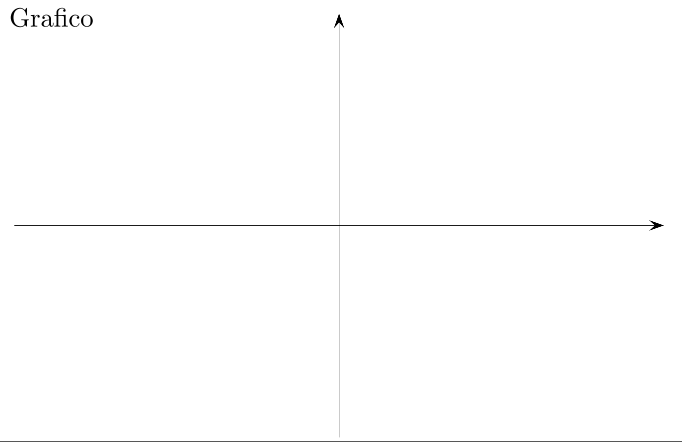
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[4]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, una primitiva di una funzione f in $]a,b[$ è:

7 Descrivere con precisione le relazioni tra la derivata e le proprietà di monotonia di una funzione f

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2}{2+x^4}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$; f) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; g) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y(t^2+1)}{t\ln^2 y} \\ y(1) = \mathrm{e} \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{3t-2}$ è soluzione del problema per $t > 0$;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

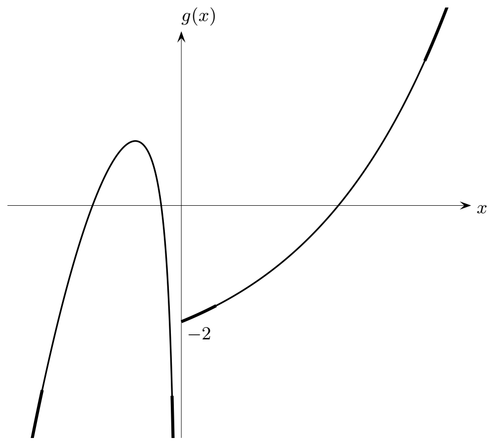
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{5+3x^4\cos^2 x}{\cos^2 x} + 5^x\right) dx, \qquad \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 17 settembre 2010

1 A; **2** C; **3** C; **4** C; **5**-**6**-**7** consultare il libro di testo; **8** in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



9 a) Poiché il denominatore è sempre strettamente positivo, la funzione è sempre definita dunque $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Essendo razionale è ivi continua e derivabile. Si osservi inoltre che g è funzione pari quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, dunque basterebbe studiarlo per $x \geq 0$.

b) Il denominatore è sempre positivo, il numeratore è positivo tranne che in $x = 0$, dunque la funzione è sempre positiva e si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2/x^2 + x^2} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0.$$

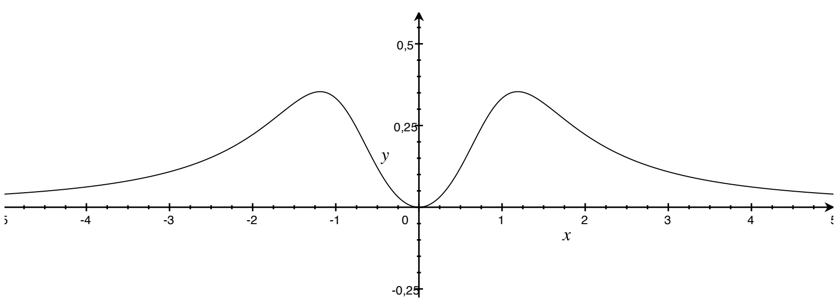
d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x(x^4+2) - x^2 4x^3}{(x^4+2)^2} = \frac{4x - 2x^5}{(x^4+2)^2} = \frac{2x(2-x^4)}{(x^4+2)^2}.$$

Poiché $2 - x^4 \geq 0$ se e solo se $-\sqrt[4]{2} \leq x \leq \sqrt[4]{2}$, il numeratore è positivo per $x < -\sqrt[4]{2}$ oppure $0 \leq x \leq \sqrt[4]{2}$, mentre il denominatore è sempre positivo. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt[4]{2}[\cup]0, \sqrt[4]{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt[4]{2} \text{ oppure } x = 0 \text{ oppure } x = \sqrt[4]{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\sqrt[4]{2}, 0[\cup]\sqrt[4]{2}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\infty, -\sqrt[4]{2}[$ e in $]0, \sqrt[4]{2}[$, mentre è decrescente in $]-\sqrt[4]{2}, 0[$ e in $]\sqrt[4]{2}, +\infty[$. In $x = 0$ ammette un minimo assoluto mentre in $x = -\sqrt[4]{2}$ e $x = \sqrt[4]{2}$ ammette due massimi assoluti.



e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = \frac{1}{3}$ e $g'(1) = \frac{2}{9}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{2}{9}(x-1) + \frac{1}{3}.$$

f) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{(4-10x^4)(x^4+2)^2 - (4x-2x^5)2(x^4+2)4x^3}{(x^4+2)^4}$$
$$= \frac{(4-10x^4)(x^4+2) - (4x-2x^5)8x^3}{(x^4+2)^4} = \frac{2(3x^8-24x^4+4)}{(x^4+2)^3}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata seconda è ≥ 0 se e solo se $3x^8 - 24x^4 + 4 \geq 0$. Quest'ultima è riconducibile ad una disequazione di secondo grado: posto $z = x^4$ si ottiene $3z^2 - 24z + 4 \geq 0$, le cui soluzioni sono date da $z \leq \frac{12-2\sqrt{33}}{3}$ oppure $z \geq \frac{12+2\sqrt{33}}{3}$. Nella variabile x si ottiene dunque $x^4 \leq \frac{12-2\sqrt{33}}{3}$ oppure $x^4 \geq \frac{12+2\sqrt{33}}{3}$ che è verificata se e solo se $-\sqrt[4]{\frac{12-2\sqrt{33}}{3}} \leq x \leq \sqrt[4]{\frac{12-2\sqrt{33}}{3}}$ oppure $x \leq -\sqrt[4]{\frac{12+2\sqrt{33}}{3}}$ oppure $x \geq \sqrt[4]{\frac{12+2\sqrt{33}}{3}}$. Posto $x_1 = \sqrt[4]{\frac{12-2\sqrt{33}}{3}}$ e $x_2 = \sqrt[4]{\frac{12+2\sqrt{33}}{3}}$ si ottiene che la funzione è concava in $]-x_2, -x_1[$ e in $]x_1, x_2[$, mentre è convessa in $]-\infty, -x_2[$, in $]-x_1, x_1[$ e in $]x_2, +\infty[$. In $x = -x_1$, $x = -x_2$, $x = x_1$ e $x = x_2$ ammette dei punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 3e^{3t-2}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3e^{3t-2} = \frac{e^{3t-2}(t^2+1)}{t\ln^2 e^{3t-2}} = \frac{e^{3t-2}(t^2+1)}{t(3t-2)^2}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = 1$ si ottiene $3e \neq 2e$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione, essendo $y(1) = e$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \frac{t^2+1}{t}\,dt = \Big(t + \frac{1}{t}\Big)\,dt$$

e integrando (utilizzando le tabelle)

$$\int \frac{\ln^2 y}{y}\,dy = \int \Big(t + \frac{1}{t}\Big)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{3}\ln^3 y = \frac{t^2}{2} + \ln t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo nell'incognita y si ottiene

$$\frac{1}{3}\ln^3 y = \frac{t^2}{2} + \ln t + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \exp\sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3\ln t + 3c}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = e$ (nella prima delle due equazioni qui sopra) si ha $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + c$, da cui si ricava $c = -\frac{1}{6}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 3\ln t - \frac{1}{2}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_e^y \frac{\ln^2 z}{z}\,dz = \int_1^t \Big(s + \frac{1}{s}\Big)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{1}{3}\ln^3 z\Big]_e^y = \Big[\frac{s^2}{2} + \ln s\Big]_1^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\ln^3 y - \frac{1}{3} = \frac{t^2}{2} + \ln t - \frac{1}{2}$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalla prima tabella si ottiene

$$\int \Big(\frac{5 + 3x^4\cos^2 x}{\cos^2 x} + 5^x\Big)\,dx = 5\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + 3\int x^4\,dx + \int 5^x\,dx$$
$$= 5\,\mathrm{tg}\,x - \frac{3}{5}x^5 + \frac{5^x}{\ln 5} + c,$$

con c costante arbitraria. Utilizzando entrambe le tabelle si ha

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (2x^2+1)^{-1/2}(2x^2+1)'\,dx = \frac{1}{4}\Big[\frac{(2x^2+1)^{1/2}}{1/2}\Big]_0^2 = 1.$$