Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica I

Esercizi sull'estremo superiore ed inferiore

Esercizio 1. Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{3n+2}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

verificare che 5 è il massimo di A e, utilizzando le proprietà caratterizzanti dell'estremo inferiore, che 3 è l'estremo inferiore di A. È anche il minimo?

Esercizio 2. Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1-n}{1+n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 3. Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{2n-1}{3n+2} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

verificare che $1/5$ è il minimo di A e, utilizzando le proprietà caratterizzanti dell'estremo superiore, che $2/3$ è l'estremo superiore di A. È anche il massimo?

Esercizio 4. Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 5. Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2+4} \,:\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 6. Dato l'insieme

$$A = \left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 7. Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n}{m} + (-1)^{n+m} \frac{m}{n} \,:\, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n > m \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 8. Dati gli insiemi

$$A_1 = \left\{ \frac{n+m}{2} - \sqrt{mn} : \; n, m \in \mathbb{N} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ \frac{n+m}{2} - \sqrt{mn} : \; n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \; n \neq m \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 9. Dati gli insiemi

$$A_1 = \left\{ \frac{n}{m} - \frac{m}{n} : \; n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ \frac{n}{m} - \frac{m}{n} : \; n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \; n \geq m \right\}$$
$$A_3 = \left\{ \frac{n}{m} - \frac{m}{n} : \; n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \; n > m \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 10. Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ tali che $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ e sia dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{\alpha m + \beta n}{\gamma m + \delta n} : \; n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 11. Dimostrare che ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ di cardinalità finita ammette massimo e minimo.

Esercizio 12. Dati A, B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, definiamo gli insiemi

$$A + B := \{a + b : \; a \in A, \, b \in B\}$$
$$A \cdot B := \{ab : \; a \in A, \, b \in B\}$$
$$\gamma \cdot A := \{\gamma a : \; a \in A\} = \{\gamma\} \cdot A$$

Dimostrare che

a) se A è limitato superiormente (risp. inferiormente) allora $-A$ è limitato inferiormente (risp. superiormente) e vale $\inf(-A) = -\sup A$ (risp. $\sup(-A) = -\inf A$);

b) se A e B sono limitati superiormente allora $A + B$ è limitato superiormente e vale

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Analogamente se sono inferiormente limitati;

c) se $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ e sono limitati superiormente, allora anche $A \cdot B$ è limitato superiormente e vale

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$$

In particolare, se $\gamma > 0$ vale $\sup(\gamma \cdot A) = \gamma \sup A$. Cosa si può dire in generale se $A, B \subseteq \mathbb{R}$?

Esercizio 13. a) Dati $A_1, A_2, \dots, A_N$ sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e superiormente limitati, dimostrare che la loro unione A è superiormente limitata e vale

$$\sup \bigcup_{i=1}^{N} A_i = \max\{\sup A_1, \sup A_2, \dots, \sup A_N\}$$

b) Cosa succede se al posto di un numero finito di insiemi, si ha una successione $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$? L'unione è ancora superiormente limitata? Vale ancora l'analogo della proprietà sopra, cioè

$$\sup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \sup\{\sup A_1, \sup A_2, \dots\} \quad ?$$

Cosa si può dire altrimenti?

Esercizio 14. Data una *successione di numeri reali* $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, dimostrare che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f(k) \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} f(k)$$

avendo definito

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f(k) := \sup\left\{\inf\left\{f(k) : \ k \geq n, \ k \in \mathbb{N}\right\} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} f(k) := \inf\left\{\sup\left\{f(k) : \ k \geq m, \ k \in \mathbb{N}\right\} : \ m \in \mathbb{N}\right\}$$