

Corso di Laurea in Matematica

ANALISI MATEMATICA I

Esercizi di base sui limiti

Esercizio 1. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti di polinomi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^7 - 3x^4 + 2), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (2t^2 - t^3 - 3), \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} (4y^3 + 2y^2 - 1), \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} (z^2 - 3z^4 + 5), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2 - x^3 + 1), \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} (y^2 - 5y^3 + 4). \end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti di funzioni razionali (forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{7x + 4}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4t - 1}{1 + 2t}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{5y - 3y^2 + 1}{2y^2 - y + 3}, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y^4 + 3y + 1}{7y^2 - 4y + 2}, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{2z^4 + z}{2 + 3z - 5z^2}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4t^2 + t - 7}{5t^3 + 2t^2 + 1}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x - 2}{4x^2 + x - 1}, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{4z^3 + z - 2}{1 - 2x}, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{2y^8 - y^2 + 1}{5y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti (forma $\frac{L}{\infty}$, oppure $\frac{L}{0}$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x}{x^4}, \quad \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y + 1}{(y - 2)^3}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \operatorname{arctg} t}{t^2 + 5}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x - 2}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 + 3z}{z \operatorname{tg} z}.$$

Esercizio 4. Trovare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} 3ax - 1, & \text{se } x < 1, \\ 2 + 3x^2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Esercizio 5. Trovare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} 2ax - 1, & \text{se } x < 1, \\ 2 + 2(1 - a)x - a^2x^2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Esercizio 6. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti di funzioni irrazionali:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{5x + 3 - 2x^2} - \sqrt{x^2 + x - 4} \right), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{5z + 1} + \sqrt{12z^2 - 3z + 4} \right), \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{y^2 - y + 5} - \sqrt{3y^3 + 2} \right), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{z - 2} - \sqrt{z + 1} \right), \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2y^2 - 2y + 1} - \sqrt{2y^2 + y + 2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} - \sqrt{x^3 - 3} \right). \end{aligned}$$

Esercizio 7. Calcolare i seguenti limiti, utilizzando un cambiamento di variabile:

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi/2} \frac{\cos x}{2x - 3\pi}, \quad \lim_{z \rightarrow 3\pi/2} \frac{1 + \operatorname{sen} z}{(2z - 3\pi)^2}, \quad \lim_{y \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos y}{(y - \pi)^2}.$$

Esercizio 8. Calcolare, utilizzando il teorema dei due carabinieri, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right).$$

Esercizio 9. Calcolare i seguenti limiti (di funzioni trigonometriche):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{\operatorname{tg}(5y)}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(4z - 5z^2)}{z}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{sen}(5x)}{x + 3 \operatorname{sen} x}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t^2)}{t^3 \operatorname{sen}(2t)}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3y^2)}{y \operatorname{sen}(2y)}. \end{aligned}$$

Esercizio 10. Avanzati e di ricapitolazione.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^4}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \operatorname{sen} y - 2y}{7y + 3 \operatorname{sen} y}, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{5 \operatorname{sen} y - 2y}{7y + 3 \operatorname{sen} y}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x^{5/2} + 1}{x^2 + 4x\sqrt{x} - 5}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(2x) - 3 \operatorname{tg}(x^3)}{4x^3 + 3x \operatorname{tg}(2x)}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt[3]{x} \operatorname{sen} \sqrt[3]{x^2} - 4x\sqrt[4]{x}}{\operatorname{sen}(3x^2) + \sqrt{x} \operatorname{tg}(2\sqrt{x})}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(1 - \cos \sqrt{x^3}) + 5\sqrt[3]{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}}{2x^{5/6} - \sqrt[3]{x} \operatorname{sen} x^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 11. Calcolare i seguenti limiti (forma $0 \cdot \{\text{funz. limitata}\}$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((1/2)^x \frac{5 \operatorname{sen} x + 1}{3 + \cos x} \right), \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} ((3z^3 - z) \operatorname{sen}(\ln z)).$$

Esercizio 12. Calcolare i seguenti limiti (di funzioni esponenziali e logaritmiche).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x)}{x^2}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(8y)}{\sqrt{y}}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln(2t^8)), \\ \lim_{w \rightarrow +\infty} \frac{2^w}{\ln w}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{\log_{1/2} x}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{100}}{2^y}, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^{100}}{2^y}. \end{aligned}$$

Esercizio 13. Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{3x}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\operatorname{sen} y}}{y}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5z)}{4z}, \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3 \operatorname{sen} z)}{\ln(1 - 2z)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 4^x}{5x^4 + 2 \cdot 3^x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 4^x}{5x^4 + 2 \cdot 3^x}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln t^6 + 4t^5 - 3^t}{\operatorname{arctg}(5^t) + 2^t - 3t^4}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{3y-2y^2} - 1}{7y}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x) - 3x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(4x)}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{3x - 2 \operatorname{tg} x}, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{2z^2 - \ln(z^4 + 1)}{3z^3 + 2z - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\operatorname{sen}(7x)}. \end{aligned}$$

Esercizio 14. Calcolare il valore dei seguenti limiti (ove utile, si ricordi anche il limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x-2}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} (1 - y)^{\frac{2}{y}}, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{3z+2}\right)^{z+1}, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y^2}{2y+1}\right)^y, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{5x+4}\right)^x, \quad \lim_{w \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{w^2+1}\right)^{3w}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2-3x+2}\right)^x, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y-1}{y^2+y+2}\right)^y, \quad \lim_{w \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2w+1}{w^3+2w+1}\right)^{w^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 15. Calcolare i seguenti limiti di forme esponenziali.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^x)^x, \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x-2}{1-2x}\right)^x, \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} z)^{\ln z}, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{y}\right)^y, \quad \lim_{w \rightarrow +\infty} \left(\frac{w^2+2}{5w-3}\right)^{-\ln w}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)^{\ln x}. \end{aligned}$$

Esercizio 16. Calcolare i seguenti limiti di forme esponenziali.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +\infty} (1+z)^{1/z}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{3x} - e^{2x})^{1/\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{3x} - e^{2x})^{1/(x \ln x)}, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} y^2)^{1/\ln(1-\cos y)}, \\ \lim_{z \rightarrow 0^+} (\cos z + z^2)^{1/z}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln(7x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - x^x)^x. \end{aligned}$$

Esercizio 17. (Avanzato) Calcolare il valore dei seguenti limiti.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + 2e^x) - x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x^2+1}}{\ln \frac{x^3+1}{3x+5}}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\ln(\ln(1+x))}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x^3)^{1/x} - \cos x}{x^2}. \end{aligned}$$