

Corso di Laurea in Matematica

ANALISI MATEMATICA I

Esercizi sulla topologia dei numeri reali

Esercizio 1. Determinare la parte interna, la chiusura, i punti di accumulazione dei seguenti insiemi

$$A_1 = \mathbb{Z}, \quad A_2 = [0, 1[\cup \mathbb{Q}, \quad A_3 = \{1\} \cup]2, 3[\cup]3, 7], \quad A_4 = \left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$A_5 = \{\pi + q : q \in \mathbb{Q}\}, \quad A_6 = \mathbb{Q} \cup \{\pi + q : q \in \mathbb{Q}\}, \quad A_7 = \{x + z : z \in \mathbb{Z}, x \in [0, 1]\}.$$

Esercizio 2. Dimostrare che se x è punto di accumulazione per $A \cap B$, supposto non vuoto, allora è di accumulazione per A e per B . Vale il viceversa?

Esercizio 3. Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

- a) determinare l'insieme dei punti di accumulazione ed eseguire la verifica;
 - b) verificare che tutti gli altri punti non sono di accumulazione per A .
-
-

Esercizi sui limiti

Esercizio 4. Verificare, mediante la definizione, la validità dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2+x+2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+5}{x+2} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{x} = +\infty.$$

Esercizio 5. Calcolare, qualora esistano, i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)}) & \text{b)} \quad \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + 4t + \cos(\pi t)}{t^5(1-t) \ln t} \\ \text{c)} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{y^2 + 3y - 1}{4y^2 + 2 + y^3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{y^8 + 3y^3 + 1}{1 - 3y^5} \right) & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(1 - \cos \sqrt{x^3}) + 5\sqrt[3]{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}}{2x^{5/6} - \sqrt[3]{x} \operatorname{sen} x^2} \end{array}$$

Esercizio 6. Calcolare, qualora esista, il seguente limite al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^{\operatorname{sen} x} - 3 \cos x + 1 + \alpha}{(x - \alpha)^2 - \alpha \operatorname{sen}(x^2) - \alpha}$$

Esercizio 7. Dimostrare che la successione $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ non ammette limite.

Esercizio 8. Dimostrare che se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata inferiormente, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

Esercizio 9. Siano date $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A'$.

- a) Dimostrare che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$, con $\beta < 0$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = -\infty.$$

- b) Dimostrare che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ e g è limitata superiormente in un opportuno intorno di x_0 , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty.$$

Esercizi sulle funzioni continue

Esercizio 10. Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)x^2 - 3a^2x + 10 & \text{se } x < 1 \\ 3 - 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) determinare per quali valori del parametro reale a , la funzione f è continua in $\mathbb{R}$;
b) per tali valori dire se la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare la legge della funzione inversa.

Esercizio 11. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x}$

- a) verificare che per ogni $x_0 > 0$, f è lipschitziana su $[x_0, +\infty[$;
b) verificare che f non è lipschitziana su $]0, +\infty[$ (quindi nemmeno in $[0, +\infty[$);
c) verificare che f è hölderiana di esponente $1/2$ in $[0, +\infty[$.

Esercizio 12. Dimostrare che la costante di Lipschitz della funzione seno è $L = 1$.

Esercizio 13. Dimostrare che se $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ è hölderiana di esponente α (con $0 < \alpha \leq 1$) allora è anche hölderiana di esponente β per ogni $0 < \beta < \alpha$.

Esercizio 14. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^p$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, dove $p > 1$.

- a) verificare, utilizzando le derivate (solo per chi le conosce), che f è una funzione costante;
b) verificare che f è una funzione costante senza utilizzare le derivate.

Esercizio 15. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, non costante e periodica. Dimostrare allora che ammette *periodo minimo* T_m strettamente positivo, cioè che

$$T_m := \min \{T > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)\} > 0$$