Università degli Studi di Udine

Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica I

Appello del 16 febbraio 2010 - prima parte

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Tempo a disposizione: 1.5 ore

1 Data la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 1/2 \\ a_{n+1} = a_n \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n^{a_n}+1)}, \end{cases}$$

a) verificare, ad esempio per induzione, che a_n è ben definito e $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$;

b) dimostrare che $a_n < 1$ per ogni $n \geq 1$ (a tal fine potrebbe risultare utile sfruttare la crescenza della funzione $f_n(x) := \frac{x}{\ln(n^x+1)}$ in $[0, +\infty[$ per ogni fissato $n \geq 1$);

c) dimostrare che (a_n) è monotona strettamente crescente;

d) studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite di (a_n);

e) verificare la suddetta proprietà di monotonia di f_n.

2 Discutere l'esistenza e l'eventuale valore del limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + \pi x^\alpha + 1} - \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt[4]{x^3}\ln\left(1 + x^{\frac{\alpha-3}{2}}\right)}$$

a) nei casi $\alpha = 1/2$ ed $\alpha = 4$;

b) in generale al variare del parametro $\alpha > 0$.

Soluzioni della prima parte dell'esame del 16 febbraio 2010

1a La successione (a_n) è banalmente ben definita per ogni n. Per dimostrare che è positiva procediamo per induzione: a_1 è positivo. Supponendo ora che $a_n > 0$ sia positivo per un certo n, essendo $n^{a_n} > 0$ si ha $\ln(n^{a_n} + 1) > 0$ e allora a_{n+1} è positivo. Per induzione si ha la tesi.

1b Procediamo ancora per induzione: $a_1 = 1/2 < 1$. Supponiamo poi che $a_n < 1$ (e positivo per a)) per un certo $n \geq 1$; grazie al suggerimento si ha $f_n(a_n) < f_n(1) = \frac{1}{\ln(n+1)}$ perciò

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\ln(n^{a_n} + 1)} \ln(n + 1) = f_n(a_n) \ln(n + 1) < 1.$$

Per induzione si ha che $a_n < 1$ per ogni $n \geq 1$.

1c Per il punto b) vale $a_n < 1$ da cui segue che $n^{a_n} < n$ e per la monotonia del logaritmo si ha $a_{n+1} = a_n \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n^{a_n} + 1)} > a_n$, cioè la tesi.

1d Per il teorema sul limite delle successioni monotone si ha che (a_n) ammette limite ℓ, e per confronto $0 < \ell \leq 1$. Passando al limite $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1} si ottiene

$$\begin{aligned}\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to+\infty} a_n \frac{\ln(n+1)}{\ln(n^{a_n}+1)} = \ell \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(n(1+\frac{1}{n})\right)}{\ln\left(n^{a_n}(1+\frac{1}{n^{a_n}})\right)} \\ &= \ell \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{a_n \ln n + \ln(1+\frac{1}{n^{a_n}})} = \ell \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}}{a_n + \frac{\ln(1+\frac{1}{n^{a_n}})}{\ln n}} = \ell \frac{1}{\ell} = 1,\end{aligned}$$

perciò $\ell = 1$.

1e Per $n = 1$ si ha banalmente $f_1(x) = \frac{x}{\ln 2}$ che è banalmente strettamente crescente. Per $n > 1$ la funzione f_n è definita e derivabile in $[0, +\infty[$ e si ha

$$f_n'(x) = \frac{\ln(n^x+1) - x\frac{1}{n^x+1}n^x \ln n}{\ln^2(n^x+1)} = \frac{(n^x+1)\ln(n^x+1) - n^x \ln n^x}{(n^x+1)\ln^2(n^x+1)} > 0$$

poiché $n^x \geq 1$ e la funzione $z \mapsto z \ln z$ è strettamente crescente in $[1, +\infty[$ essendo prodotto di funzioni crescenti e positive nell'intervallo. Essendo $f_n'(x) > 0$ per $x \geq 0$ la funzione è ivi strettamente crescente. Alternativamente si poteva notare che $f_n(x) = g_n(n^x)$ con $g_n(y) = \frac{\ln y}{\ln n \ln(y+1)}$ e verificare che g_n è strettamente crescente.

2a Caso $\alpha = 4$: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\pi x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt[4]{x^3} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right)} = 0$$

in quanto il denominatore tende a $+\infty$ e il numeratore è limitato. Caso $\alpha = 1/2$: ricordando il limite $\lim_{z\to0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$ ed essendo $\lim_{x\to+\infty} x^{-5/4} = 0$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + \pi\sqrt{x} + 1} - \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt[4]{x^3} \ln\left(1 + x^{-5/4}\right)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + \pi\sqrt{x} + 1} - \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt[4]{x^3}\, x^{-5/4} \frac{\ln\left(1+x^{-5/4}\right)}{x^{-5/4}}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + \pi\sqrt{x} + 1} - \sqrt{x^2+1}\right)\end{aligned}$$

L'argomento del seno può essere riscritto nel seguente modo

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + \pi\sqrt{x} + 1} - \sqrt{x^2+1} &= \frac{(\sqrt{x^2+\pi\sqrt{x}+1})^2 - (\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+\pi\sqrt{x}+1} + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{1 + \frac{\pi\sqrt{x}+1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{\pi}{2\sqrt{x} f(x)},\end{aligned}$$

dove $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\pi\sqrt{x}+1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Ricordando ora che $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+\pi\sqrt{x}+1} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2f(x)}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{x}f(x)}\right)}{\frac{\pi}{2\sqrt{x}f(x)}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\textbf{2b}}$ Studiamo separatamente il comportamento del numeratore e del denominatore. Numeratore: per $\alpha > 2$ si ha facilmente

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\pi x^\alpha+1} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left(\sqrt{\pi+\frac{x^2+1}{x^\alpha}} - \sqrt{\frac{x^2+1}{x^\alpha}}\right) = \left[+\infty\cdot\sqrt{\pi}\right] = +\infty,$$

e una cosa analoga accade se $\alpha = 2$. Se $\alpha < 2$, come nel caso a) si può riscrivere

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+\pi x^\alpha+1} - \sqrt{x^2+1} &= \frac{(\sqrt{x^2+\pi x^\alpha+1})^2 - (\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+\pi x^\alpha+1}+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\pi x^\alpha}{x\left(\sqrt{1+\frac{\pi x^\alpha+1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{\pi}{2f_\alpha(x)}x^{\alpha-1},\end{aligned}$$

dove $f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\pi x^\alpha+1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 1$. Se allora $1 < \alpha < 2$ si ha ancora che il limite dell'ultima espressione è $+\infty$, se $\alpha = 1$ tale limite è $\pi/2$, se $0 < \alpha < 1$ è 0. Di conseguenza.

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+\pi x^\alpha+1} - \sqrt{x^2+1}\right) = \begin{cases} \nexists & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

nell'ultimo caso la funzione essendo asintotica a $\frac{\pi}{2x^{1-\alpha}}$.

Denominatore: per $\alpha > 3$ il denominatore tende a $+\infty$ essendo prodotto di funzioni che tendono a più infinito; analogamente se $\alpha = 3$, nel qual caso il secondo fattore coincide con $\ln 2$. Se $\alpha < 3$ a denominatore compare una forma indeterminata $+\infty\cdot 0$. Essendo $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\alpha-3}{2}} = 0$ si può scrivere

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^3}\ln(1+x^{\frac{\alpha-3}{2}})\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^3}x^{\frac{\alpha-3}{2}}\frac{\ln(1+x^{\frac{\alpha-3}{2}})}{x^{\frac{\alpha-3}{2}}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2\alpha-3}{4}},$$

perciò se $3/2 < \alpha < 3$ il denominatore tende sempre a $+\infty$, se $\alpha = 3/2$ tende a 1, se $0 < \alpha < 3/2$ tende a 0.

Da questa analisi segue subito che il limite richiesto è 0 se $\alpha > 3$ (la funzione in oggetto è prodotto di una funzione limitata per una infinitesima), non esiste se $1 < \alpha \le 3/2$ (la funzione è prodotto di una funzione che tende a $+\infty$ e una di segno oscillante), è uguale a $+\infty$ se $\alpha = 1$ (il limite è della forma $\frac{1}{0^+}$). Resta da considerare il caso in cui $\alpha < 1$, per il quale

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+\pi x^\alpha+1} - \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt[4]{x^3}\ln\left(1+x^{\frac{\alpha-3}{2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2x^{1-\alpha}}}{x^{\frac{2\alpha-3}{4}}} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2\alpha-1}{4}},$$

perciò il limite è $+\infty$ se $1/2 < \alpha < 1$, è $\pi/2$ se $\alpha = 1/2$, è 0 se $0 < \alpha < 1/2$. Ricapitolando

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+\pi x^\alpha+1} - \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt[4]{x^3}\ln\left(1+x^{\frac{\alpha-3}{2}}\right)} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1/2 \text{ oppure } \alpha > 3/2 \\ \nexists & \text{se } 1 < \alpha \le 3/2 \\ +\infty & \text{se } 1/2 < \alpha \le 1 \\ \pi/2 & \text{se } \alpha = 1/2. \end{cases}$$