Università degli Studi di Udine

Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica I

Appello del 9 settembre 2009 - prima parte

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Tempo a disposizione: 1.5 ore

1 Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ due fissati parametri e si definisca per induzione la seguente successione

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \ln\left(\dfrac{1}{n^\alpha\, a_n^\beta} + \mathrm{e}^{a_n}\right). \end{cases}$$

a) verificare che (a_n) è ben definita;

b) provare che (a_n) è monotona strettamente crescente;

c) denotato con $\ell_{\alpha,\beta}$ l'eventuale limite di (a_n) studiare l'esistenza e l'eventuale valore di $\ell_{0,1}$ e $\ell_{2,0}$;

d) dimostrare che se $\alpha, \beta > 1$ la successione (a_n) è convergente e dare una stima superiore del limite $\ell_{\alpha,\beta}$;

e) (*) per ogni fissato $\alpha > 1$ calcolare $\lim_{\beta\to+\infty} \ell_{\alpha,\beta}$;

f) (*) calcolare $\ell_{1,\beta}$ al variare di $\beta \geq 1$.

2 Detta $[x]$ la parte intera del numero reale x, sia $\mathrm{frac}(x) := x - [x]$ la *parte frazionaria di x*. Definita $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ come $f(x) = \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{frac}(x))x}$

a) dire se f è continua e in caso negativo determinare i suoi punti di discontinuità all'interno del dominio e ivi calcolare, se possibile, il limite sinistro e il limite destro;

b) dire se esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, nel qual caso calcolarlo;

c) calcolare $\inf_{x\geq 1} f(x)$ e $\sup_{x\geq 1} f(x)$, e dire se sono rispettivamente minimo e massimo della funzione.

Soluzioni della prima parte dell'esame del 9 settembre 2009

1a Dimostriamo questo punto per ogni generica scelta di α, β. L'eventuale problema potrebbe essere dato dall'annullarsi del fattore a_n^β presente a denominatore della frazione che definisce a_{n+1}. Procediamo per induzione: a_1 è ben definito e maggiore di 0. Supposto che a_n sia ben definito e maggiore di 0 allora si può dividere per a_n, perciò a_{n+1} è ben definito e $a_{n+1} > \ln(\mathrm{e}^{a_n}) = a_n > 0$. Per il principio di induzione si ha che (a_n) è ben definito e positivo.

1b Si ha banalmente (e indipendentemente dalla scelta di α, β) $a_{n+1} > \ln(\mathrm{e}^{a_n}) = a_n$ da cui la tesi.

1c Per il teorema sul limite delle successioni monotone si ha che (a_n) ammette limite $\ell_{\alpha,\beta}$. Per la crescenza si ha $\ell_{\alpha,\beta} > a_1 = 2$. Consideriamo il caso $\alpha = 0$, $\beta = 1$: se $\ell_{0,1}$ fosse finito, passando al limite per $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1}, si avrebbe

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{a_n} + \mathrm{e}^{a_n}\right) \iff \ell_{0,1} = \ln\left(\frac{1}{\ell_{0,1}} + \mathrm{e}^{\ell_{0,1}}\right) \iff \mathrm{e}^{\ell_{0,1}} = \frac{1}{\ell_{0,1}} + \mathrm{e}^{\ell_{0,1}}$$

cioè $0 = \frac{1}{\ell_{0,1}}$ che è un assurdo. Dunque deve necessariamente essere $\ell_{0,1} = +\infty$.

Consideriamo ora il caso $\alpha = 2$, $\beta = 0$. Se $\ell_{2,0}$ fosse finito, passando al limite per $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1}, si otterrebbe

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n^2} + \mathrm{e}^{a_n}\right) \iff \ell_{2,0} = \ln(\mathrm{e}^{\ell_{2,0}}) \iff \ell_{2,0} = \ell_{2,0},$$

che è sempre vero. Quindi, a priori *qualunque* valore reale del limite $\ell_{2,0}$ è compatibile con la definizione di (a_n). Inoltre, come si verifica facilmente, anche $\ell_{2,0} = +\infty$ è un valore consentito.

Per calcolare esplicitamente il valore di $\ell_{2,0}$ conviene introdurre (avremmo potuto farlo fin dall'inizio) la successione $b_n := \mathrm{e}^{a_n}$ per la quale

$$b_{n+1} = \frac{1}{n^\alpha (\ln b_n)^\beta} + b_n.$$

Si noti che

$$\begin{aligned} b_N &= (b_N - b_{N-1}) + (b_{N-1} - b_{N-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 \\ &= b_1 + \sum_{n=1}^{N-1} (b_{n+1} - b_n) = b_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^\alpha (\ln b_n)^\beta}. \end{aligned}$$

Nel caso considerato, essendo anche $b_1 = \mathrm{e}^{a_1} = \mathrm{e}^2$, si ottiene quindi

$$\lim_{N\to+\infty} b_N = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \mathrm{e}^2 + \frac{\pi^2}{6},$$

e in definitiva

$$\ell_{2,0} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \ln b_n = \ln\left(\mathrm{e}^2 + \frac{\pi^2}{6}\right).$$

1d Sfruttando l'idea del punto c) e ricordando che $\ln b_n = a_n \geq 2$, si ottiene

$$\lim_{N\to+\infty} b_N = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln b_n)^\beta} \leq \mathrm{e}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha 2^\beta} = \mathrm{e}^2 + \frac{S_\alpha}{2^\beta},$$

dove $S_\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è la somma di una serie (armonica generalizzata) convergente per $\alpha > 1$. Perciò

$$2 < \ell_{\alpha,\beta} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \ln b_n \leq \ln\left(\mathrm{e}^2 + \frac{S_\alpha}{2^\beta}\right) = 2 + \ln\left(1 + \frac{S_\alpha}{2^\beta \mathrm{e}^2}\right). \tag{1}$$

1e Essendo

$$\lim_{\beta\to+\infty} \ln\left(e^2 + \frac{S_\alpha}{2^\beta}\right) = 2,$$

per (1) e il teorema dei due carabinieri segue che $\lim_{\beta\to+\infty} \ell_{\alpha,\beta} = 2$, per qualsiasi scelta di $\alpha > 1$.

1f L'analisi del punto d) non si applica perché S_1 è una serie divergente. Se, per assurdo, (b_n) fosse convergente allora sarebbe superiormente limitata da $\ell_{1,\beta} \in \mathbb{R}$, e passando al limite si otterrebbe

$$\ell_{1,\beta} = \lim_{N\to+\infty} b_N = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln b_n)^\beta} \geq b_1 + \frac{1}{(\ln \ell_{1,\beta})^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

contro la divergenza della serie armonica. Quindi la successione deve necessariamente divergere, cioè $\ell_{1,\beta} = +\infty$ per ogni $\beta \geq 1$.

2a La funzione $\mathrm{frac}(x)$ ha valori in $[0,1[$ ed è discontinua in ogni punto intero, più precisamente

$$\lim_{x\to n^-} \mathrm{frac}(x) = \lim_{x\to n^-} \big(x - [x]\big) = 1, \qquad \lim_{x\to n^+} \mathrm{frac}(x) = \lim_{x\to n^+} \big(x - [x]\big) = 0,$$

per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$, quindi $\lim_{x\to n^-} f(x) = e^0 = 1$, $\lim_{x\to n^+} f(x) = e^{-n} = f(n)$, dunque i punti $x_n = n$ sono punti di salto per la funzione nei quali f è continua a destra.

2b Il limite non esiste. Per dimostrarlo, troviamo due successioni (x_n), (y_n) tali che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ ma

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n).$$

Sia $x_n = n$ per cui $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$. Scegliamo invece $y_n = n - \frac{1}{n^2}$, per cui

$$\mathrm{frac}\big(n - \frac{1}{n^2}\big) = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \big(1 - \mathrm{frac}(y_n)\big) y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4},$$

e in definitiva

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}} = 1 \neq \lim_{n\to+\infty} f(x_n),$$

da cui la tesi.

2c Essendo $\mathrm{frac}(x) \in [0,1[$ si ha $0 < e^{-x} \leq f(x) < e^0 = 1$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ si ottiene $\inf_{x\geq 1} f(x) = 0$ e banalmente non è un minimo. Essendo inoltre $\lim_{x\to n^-} f(x) = 1$ segue che $\sup_{x\geq 1} f(x) = 1$ ed anche questo non è un valore assunto dunque non è massimo.