Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica I

Appello del 8 luglio 2009 - prima parte

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Tempo a disposizione: 1.5 ore

1 Data la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{3} \\ a_{n+1} = \dfrac{3}{2} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n a_n + 2}{n+3}\right), \end{cases}$$

a) verificare che $a_n \leq 3/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

b) dimostrare che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

c) provare che (a_n) è monotona strettamente crescente;

d) dimostrare che (a_n) ammette limite finito e calcolarne un valore approssimato con un errore non superiore a 1/3.

2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = L,$$

con $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$. Considerato il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\alpha x^2) - (\alpha f(x))^2 + 2x^2}{f(x^3) + \alpha x^2 f(x)}$$

a) calcolarlo nel caso $\alpha = -1$;

b) determinare i valori del parametro $\alpha \neq 0$ per i quali il limite esiste finito, e in tal caso calcolarlo.

Soluzioni della prima parte dell'esame del 8 luglio 2009

$\boxed{\textbf{1a}}$ Si ha banalmente $a_0 = 2/3 < 3/2$ ed essendo $\operatorname{sen} x \le x$ segue $a_{n+1} = \frac{3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{na_n+2}{n+3}\right) \le \frac{3}{2}$ per $n \ge 0$.

$\boxed{\textbf{1b}}$ Osserviamo che per il punto a) e con facili conti si ha

$$\frac{na_n + 2}{n+3} \le \frac{n\frac{3}{2} + 2}{n+3} \le \frac{3}{2},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Procediamo per induzione. Si ha $a_0 > 0$; supposto poi $a_n > 0$ si ha

$$\frac{2}{n+3} < \frac{na_n + 2}{n+3} \le \frac{3}{2},$$

e poiché $[\frac{2}{n+3}, \frac{3}{2}]$ è contenuto in $]0, \frac{\pi}{2}[$, intervallo sul quale la funzione seno è strettamente positiva, si ha $a_{n+1} > 0$. Per il principio di induzione si ha che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{1c}}$ Procediamo per induzione. Più precisamente dimostriamo che $a_n < a_{n+1}$ e $a_n \ge 2/3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha $a_0 = 2/3$ e

$$a_0 < a_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3} < \frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{2}{3},$$

che è vero essendo $\frac{2}{3} > \frac{\pi}{6}$ e dunque $\frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{2}{3} > \frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$. Supponiamo ora che $a_n < a_{n+1}$ e $a_n \ge 2/3$ per un certo n. Si osserva subito che anche $a_{n+1} > a_n \ge 2/3$. Inoltre, poiché per quanto visto sopra $\frac{na_n+2}{n+3} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, intervallo sul quale la funzione seno è strettamente crescente, si ha

$$\begin{aligned}
a_{n+1} < a_{n+2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{na_n + 2}{n+3}\right) < \frac{3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)a_{n+1} + 2}{(n+1)+3}\right) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{na_n + 2}{n+3} < \frac{(n+1)a_{n+1} + 2}{n+4} \quad \Longleftrightarrow \quad (na_n + 2)(n+4) < ((n+1)a_{n+1} + 2)(n+3) \\
&\Longleftrightarrow \quad (n^2 + 4n + 3)(a_{n+1} - a_n) + (3a_n - 2) > 0,
\end{aligned}$$

vera per ipotesi induttiva. Quindi $a_{n+1} < a_{n+2}$ e per il principio di induzione si ottiene che $a_n < a_{n+1}$ e $a_n \ge 2/3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{1d}}$ Per il teorema sul limite delle successioni monotone si ha che (a_n) ammette limite ℓ, ed essendo $2/3 < a_n < 3/2$, per confronto il limite è finito e verifica $2/3 < \ell \le 3/2$. Passando al limite $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1} si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{na_n + 2}{n+3}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \frac{3}{2} \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{a_n + 2/n}{1 + 3/n}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \frac{3}{2} \operatorname{sen} \ell.$$

Osserviamo che $\ell = 0$ è una soluzione banale dell'equazione precedente, ma tale valore non può essere il limite perché la successione è monotona crescente e inferiormente limitata da $2/3$. Dobbiamo quindi studiare l'esistenza di zeri della funzione $f(x) = x - \frac{3}{2} \operatorname{sen} x$ nell'intervallo $[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$. Notiamo che f è continua e $f(2/3) < 0$ (verificato sopra) e $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{3}{2} > 0$ dunque per il teorema degli zeri f ammette uno zero ℓ nell'intervallo. Mediante il calcolo differenziale si può poi verificare che tale zero è unico. Per il calcolo approssimato di ℓ si potrebbe procedere per bisezione a partire dall'intervallo $[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$. Conviene però cambiare intervallo e partire, ad esempio, da $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. Si ha infatti

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{3}\frac{15}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}(5 - 3\sqrt{3}) < 0,$$

essendo $5^2 < 27 = (3\sqrt{3})^2$, ed anche

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} > 0.$$

Dunque f ammette ivi uno zero che si dimostra essere necessariamente ℓ. Prendendo come approssimazione il punto medio si ha che $\ell \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{12}$ con un errore inferiore a $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12} < \frac{1}{3}$, come richiesto.

2a-b La maniera migliore per risolvere l'esercizio è utilizzare gli sviluppi. Dall'ipotesi segue infatti che $f(x) = x + Lx^2 + o(x^2)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} f(\alpha x^2) &= \alpha x^2 + L(\alpha x^2)^2 + o\big((\alpha x^2)^2\big) = \alpha x^2 + o(x^3), \\ f(x)^2 &= \big(x + Lx^2 + o(x^2)\big)^2 = x^2 + 2Lx^3 + o(x^3), \\ f(x^3) &= x^3 + Lx^6 + o(x^6) = x^3 + o(x^4), \end{aligned}$$

dunque, per $x \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha x^2) - (\alpha f(x))^2 + 2x^2}{f(x^3) + \alpha x^2 f(x)} &= \frac{\alpha x^2 + o(x^3) - \alpha^2(x^2 + 2Lx^3 + o(x^3)) + 2x^2}{x^3 + o(x^4) + \alpha x^2(x + Lx^2 + o(x^2))} \\ &= \frac{(2 + \alpha - \alpha^2)x^2 - 2\alpha^2 Lx^3 + o(x^3)}{(1+\alpha)x^3 + \alpha Lx^4 + o(x^4)} = \frac{(2 + \alpha - \alpha^2) - 2\alpha^2 Lx + o(x)}{(1+\alpha)x + \alpha Lx^2 + o(x^2)}. \end{aligned}$$

Si osserva che se $2 + \alpha - \alpha^2 \neq 0$ i limiti sinistro e destro relativi al limite richiesto sono infiniti. Sia dunque $2 + \alpha - \alpha^2 = 0$ ovvero $\alpha = -1$ oppure $\alpha = 2$. In particolare, se $\alpha = -1$ si ottiene

$$\frac{f(\alpha x^2) - (\alpha f(x))^2 + 2x^2}{f(x^3) + \alpha x^2 f(x)} = \frac{-2Lx + o(x)}{-Lx^2 + o(x^2)} = \frac{2 + o(1)}{x + o(x)},$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(\alpha x^2) - (\alpha f(x))^2 + 2x^2}{f(x^3) + \alpha x^2 f(x)} = \pm\infty.$$

Nel caso $\alpha = 2$ il limite è effettivamente finito e si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\alpha x^2) - (\alpha f(x))^2 + 2x^2}{f(x^3) + \alpha x^2 f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-8Lx + o(x)}{3x + 2Lx^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-8L + o(1)}{3 + o(1)} = -\frac{8}{3}L.$$

Senza utilizzare gli sviluppi si può procedere come segue: definiamo la funzione $h(x) := \frac{f(x)-x}{x^2}$ tale che $\lim_{x\to 0} h(x) = L$. Allora

$$\begin{aligned} f(\alpha x^2) &= (\alpha x^2)^2 \frac{f(\alpha x^2) - \alpha x^2}{(\alpha x^2)^2} + \alpha x^2 = \alpha x^2 + \alpha^2 x^4 h(\alpha x^2), \\ f(x^3) &= x^6 \frac{f(x^3) - x^3}{x^6} + x^3 = x^3 + x^6 h(x^3), \\ x^2 f(x) &= x^4 \frac{f(x) - x}{x^2} + x^3 = x^3 + x^4 h(x), \\ (f(x))^2 &= (f(x) - x + x)^2 = (f(x) - x)^2 + 2x(f(x) - x) + x^2 \\ &= x^4 \Big(\frac{f(x) - x}{x^2}\Big)^2 + 2x^3 \frac{f(x) - x}{x^2} + x^2 = x^2 + 2x^3 h(x) + x^4 h^2(x), \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha x^2) - (\alpha f(x))^2 + 2x^2}{f(x^3) + \alpha x^2 f(x)} &= \frac{\alpha x^2 + \alpha^2 x^4 h(\alpha x^2) - \alpha^2\big(x^2 + 2x^3 h(x) + x^4 h^2(x)\big) + 2x^2}{x^3 + x^6 h(x^3) + \alpha(x^3 + x^4 h(x))} \\ &= \frac{(2 + \alpha - \alpha^2)x^2 - 2\alpha^2 x^3 h(x) + \alpha^2 x^4 h(\alpha x^2) - \alpha^2 x^4 h^2(x)}{(1+\alpha)x^3 + \alpha x^4 h(x) + x^6 h(x^3)} \\ &= \frac{(2 + \alpha - \alpha^2) - 2\alpha^2 x h(x) + \alpha^2 x^2 h(\alpha x^2) - \alpha^2 x^2 h^2(x)}{(1+\alpha)x + \alpha x^2 h(x) + x^4 h(x^3)}. \end{aligned}$$

A questo punto, ricordandosi che h ha limite L quando $x \to 0$, si può procedere analogamente a sopra e concludere.