Università degli Studi di Udine

Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica I

Appello del 16 giugno 2009 - prima parte

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Tempo a disposizione: 1.5 ore

1 Sia data la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \bar{a} \\ a_{n+1} = \sqrt{n^2 + (n+1)a_n^2} - n. \end{cases}$$

Nel caso $\bar{a} = 1$

a) dimostrare, ad esempio per induzione, che $0 < a_n < 2$ per ogni $n \geq 1$;

b) dimostrare che (a_n) è monotona strettamente decrescente;

c) discutere l'esistenza e l'eventuale valore del limite di (a_n);

d) studiare il comportamento della successione (a_n) al variare di $\bar{a} \in \mathbb{R}$.

2 Discutere, al variare del parametro $\alpha > 0$, l'esistenza e l'eventuale valore del limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(1 + x^{2\alpha - 1} + 3x^{2 + \frac{\alpha}{2}}\right)}{\operatorname{sen}(x^6 - 2x^\alpha)} \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{7-\alpha}{x}}\right)$$

Soluzioni della prima parte dell'esame del 16 giugno 2009

1a La successione è banalmente ben definita. Inoltre, essendo $a_1 = 1 > 0$ e

$$\sqrt{n^2 + (n+1)a_n^2} - n \geq \sqrt{n^2} - n = 0,$$

si ha anche $a_n \geq 0$ per $n \geq 1$ (per induzione si vede che in realtà $a_n > 0$) .

Per dimostrare che $a_n < 2$ per ogni n procediamo per induzione. Si ha $a_1 = 1 < 2$. Se poi supponiamo che $a_n < 2$ per un certo n allora

$$a_{n+1} = \sqrt{n^2 + (n+1)a_n^2} - n < \sqrt{n^2 + (n+1)4} - n = \sqrt{(n+2)^2} - n = 2,$$

e per il principio d'induzione si ha dunque che $a_n < 2$ per ogni $n \geq 1$.

1b Si ha

$$a_{n+1} < a_n \iff \sqrt{n^2 + (n+1)a_n^2} - n < a_n \iff$$
$$\iff n^2 + (n+1)a_n^2 < (n + a_n)^2 \iff 0 < n(2 - a_n)a_n,$$

che è vera per ogni $n \geq 1$ grazie al punto a).

1c Per il teorema sul limite delle successioni monotone (a_n) ammette limite L, ed essendo la successione compresa in $]0, 2[$, per confronto tale limite deve appartenere a $[0, 2]$.

Riscrivendo la definizione di a_n (è necessario perché altrimenti il limite si presenta in forma indeterminata) e passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 + (n+1)a_n^2} - n\right) \iff L = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2 + (n+1)a_n^2) - n^2}{\sqrt{n^2 + (n+1)a_n^2} + n}$$

$$\iff L = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1 + 1/n)a_n^2}{\sqrt{1 + \frac{n+1}{n^2}a_n^2} + 1} \iff L = \frac{L^2}{2}.$$

I possibili valori finiti del limite sono allora $L = 0$ oppure $L = 2$. Essendo (a_n) decrescente e minore di $a_1 = 1$ segue necessariamente che il limite è $L = 0$.

1d Se $\bar{a} = 0$ si vede facilmente, per induzione, che $a_n = 0$ per ogni $n \geq 1$ dunque la successione è costante e tende a zero. Analogamente, se $\bar{a} = 2$ la successione è costantemente uguale a 2.

Se $0 < \bar{a} < 2$ si può ripercorrere l'analisi dei punti a),b),c) (in effetti si era solamente utilizzato il fatto che $0 < \bar{a} < 2$) e concludere che la relativa successione è decrescente e tende a 0.

Procedendo analogamente ad a)-b), si dimostra che se $\bar{a} > 2$ allora $a_n > 2$ per ogni $n \geq 1$ e che (a_n) è crescente. Dunque anche in questo caso la successione ammette limite ma poiché $a_n > 2$ e gli unici limiti finiti possono essere $L = 0$ ed $L = 2$ si ha necessariamente che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Infine, se $\bar{a} < 0$, poiché la definizione di a_{n+1} dipende solo dal quadrato a_n^2, è chiaro che il comportamento della successione sarà analogo a quello con punto iniziale $a_0 = -\bar{a}$. In particolare, convergerà a 0 se $-2 < \bar{a} < 0$, sarà costantemente uguale a 2 per ogni $n \geq 2$ se $\bar{a} = -2$, divergerà a $+\infty$ nel caso $\bar{a} < -2$.

2 Anzitutto studiamo separatamente il comportamento di ciascuna funzione che compare nel limite. Più precisamente si ha (con leggero abuso di notazione)

$$\lim_{x\to0^+} \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{7-\alpha}{x}}\right) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} & \text{se } 7 - \alpha > 0, \text{ cioè } \alpha < 7, \\ \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} & \text{se } \alpha = 7, \\ \operatorname{arctg}(0) = 0 & \text{se } 7 - \alpha < 0, \text{ cioè } \alpha > 7, \end{cases}$$

inoltre, poiché per $\alpha > 0$ si ha $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, vale anche

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x^6 - 2x^\alpha) = 0.$$

Per quanto concerne la terza funzione, bisogna portare attenzione al termine $x^{2\alpha-1}$ che infatti tende a zero solamente se $2\alpha - 1 > 0$, ovvero $\alpha > 1/2$. Se $\alpha = 1/2$ è costantemente uguale a 1, mentre tende a $+\infty$ se $0 < \alpha < 1/2$. Tenuto conto che il logaritmo tende a $+\infty$ quando la variabile tende a $+\infty$ e che il termine $x^{2+\frac{\alpha}{2}}$ tende sempre a zero, si ottiene in definitiva che

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(1 + x^{2\alpha-1} + 3x^{2+\frac{\alpha}{2}}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1/2, \\ \ln 2 & \text{se } \alpha = 1/2, \\ 0 & \text{se } \alpha > 1/2. \end{cases}$$

Avrà dunque senso distinguere i casi $0 < \alpha < 1/2$, $1/2 < \alpha \le 7$ e $\alpha > 7$, oltre ovviamente al caso limite $\alpha = 1/2$.

Se $0 < \alpha < 1/2$ si ha in particolare $\alpha < 6$ dunque $\operatorname{sen}(x^6 - 2x^\alpha) \sim \operatorname{sen}(-2x^\alpha) \sim -2x^\alpha$. Con le notazioni degli "o piccolo" si ha più precisamente $x^6 = o(x^\alpha)$ dunque $\operatorname{sen}(x^6 - 2x^\alpha) = \operatorname{sen}(-2x^\alpha + o(x^\alpha)) = -2x^\alpha + o(x^\alpha)$. Ricordando anche il limite fondamentale $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$, si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1 + x^{2\alpha-1} + 3x^{2+\frac{\alpha}{2}}\right)}{\operatorname{sen}(x^6 - 2x^\alpha)} \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{7-\alpha}{x}}\right) = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1 + x^{2\alpha-1} + 3x^{2+\frac{\alpha}{2}}\right)}{\frac{\operatorname{sen}(x^6-2x^\alpha)}{x^6-2x^\alpha}(x^{6-\alpha} - 2)x^\alpha} = \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{+\infty}{0^-}\right] = -\infty.$$

Analogamente si tratta il caso $\alpha = 1/2$ per il quale si ha ancora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1 + x^{2\alpha-1} + 3x^{2+\frac{\alpha}{2}}\right)}{\operatorname{sen}(x^6 - 2x^\alpha)} \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{7-\alpha}{x}}\right) = \left[\frac{\ln 2}{0^-} \cdot \frac{\pi}{2}\right] = -\infty.$$

D'ora in avanti supporremo $\alpha > 1/2$ per cui anche il numeratore sarà infinitesimo. Se in particolare $1/2 < \alpha < 7$, ricordando anche il limite fondamentale $\lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1 + x^{2\alpha-1} + 3x^{2+\frac{\alpha}{2}}\right)}{\operatorname{sen}(x^6 - 2x^\alpha)} \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{7-\alpha}{x}}\right) \\ &\qquad = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln\left(1+x^{2\alpha-1}+3x^{2+\frac{\alpha}{2}}\right)}{x^{2\alpha-1}+3x^{2+\frac{\alpha}{2}}}\left(x^{2\alpha-1} + 3x^{2+\frac{\alpha}{2}}\right)}{\frac{\operatorname{sen}(x^6-2x^\alpha)}{x^6-2x^\alpha}(x^6 - 2x^\alpha)} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2\alpha-1} + 3x^{2+\frac{\alpha}{2}}}{x^6 - 2x^\alpha}. \end{aligned}$$

Per calcolare il limite dobbiamo dunque confrontare gli infinitesimi x^6, x^α, $x^{2\alpha-1}$ e $x^{2+\frac{\alpha}{2}}$ al variare del parametro $1/2 < \alpha < 7$. Il denominatore si comporta come x^α se $\alpha < 6$, come $-x^6$ se $\alpha = 6$ e come x^6 se $\alpha > 6$. Il numeratore, invece, si comporta come $x^{2\alpha-1}$ se $2\alpha - 1 < 2 + \frac{\alpha}{2}$, come $4x^{2\alpha-1}$ se $2\alpha - 1 = 2 + \frac{\alpha}{2}$, e come $x^{2+\frac{\alpha}{2}}$ se $2\alpha - 1 > 2 + \frac{\alpha}{2}$. Essendo $2\alpha - 1 < 2 + \frac{\alpha}{2}$ se e solo se $\alpha < 2$, si ottiene in definitiva che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2\alpha-1} + 3x^{2+\frac{\alpha}{2}}}{x^6 - 2x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \begin{cases} \dfrac{x^{2\alpha-1}}{-2x^\alpha} = -\dfrac{x^{\alpha-1}}{2} & \text{se } 1/2 < \alpha < 2, \\ \dfrac{4x^3}{-2x^2} = -2x & \text{se } \alpha = 2, \\ \dfrac{3x^{2+\frac{\alpha}{2}}}{-2x^\alpha} = -\dfrac{3}{2}x^{2-\frac{\alpha}{2}} & \text{se } 2 < \alpha < 6, \\ \dfrac{3x^5}{-x^6} = -\dfrac{3}{x} & \text{se } \alpha = 6, \\ \dfrac{3x^{2+\frac{\alpha}{2}}}{x^6} = 3x^{\frac{\alpha}{2}-4} & \text{se } \alpha > 6. \end{cases}$$

Dunque il limite è zero se $\alpha = 2$, mentre è uguale $-\infty$ se $\alpha = 6$. Negli altri casi bisogna considerare vari sottocasi a seconda che l'esponente sia maggiore a minore di zero. In particolare, se $1/2 < \alpha < 2$ la funzione si comporta come $-x^{\alpha-1}/2$ dunque bisognerà distinguere a seconda che $\alpha-1$ sia maggiore o minore di zero. Si ottiene facilmente che il limite è 0 se $1 < \alpha < 2$, è $-1/2$ se $\alpha = 1$ ed è $-\infty$ se $1/2 < \alpha < 1$. Analogamente si ragiona negli altri casi trovando che il limite è 0 se $2 < \alpha < 4$, è $-3/2$ se $\alpha = 4$, è $-\infty$ se $4 < \alpha < 6$, è $+\infty$ se $6 < \alpha < 8$, è 3 se $\alpha = 8$ ed è infine 0 se $\alpha > 8$. L'analisi risolverebbe il limite nel caso $\alpha \leq 7$, mentre se $\alpha > 7$ il termine relativo all'arcotangente tende a zero e deve essere considerato. Se $\alpha \geq 8$ si vede facilmente che il limite complessivo è ancora 0; resta dunque da considerare solo il caso $7 < \alpha < 8$. Per tali valori, poiché $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{7-\alpha}{x}} = 0$ e ricordando il limite fondamentale $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{arctg} z}{z} = 1$, si ottiene che il limite richiesto è dato essenzialmente da

$$\lim_{x\to 0^+} 3x^{\frac{\alpha}{2}-4} \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{7-\alpha}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+} 3x^{\frac{\alpha}{2}-4} \frac{\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{7-\alpha}{x}}\right)}{e^{\frac{7-\alpha}{x}}} e^{\frac{7-\alpha}{x}} = \lim_{x\to 0^+} 3x^{\frac{\alpha}{2}-4} e^{\frac{7-\alpha}{x}},$$

e si presenta nella forma indeterminata $+\infty \cdot 0$. Operando ad esempio il cambio di variabile nel limite $\frac{\alpha-7}{x} = z$ e ricordando il limite fondamentale $\lim_{z\to+\infty} \frac{z^\beta}{e^z} = 0$ per $\beta > 0$, si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^+} 3x^{\frac{\alpha}{2}-4} e^{\frac{7-\alpha}{x}} = (\alpha-7)^{\frac{\alpha}{2}-4} \lim_{z\to+\infty} \frac{z^{4-\frac{\alpha}{2}}}{e^z} = 0.$$

Riassumendo (ricordandosi del termine $\pi/2$ dovuto all'arcotangente nei casi $\alpha < 7$) si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1 + x^{2\alpha-1} + 3x^{2+\frac{\alpha}{2}}\right)}{\operatorname{sen}(x^6 - 2x^\alpha)} \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{7-\alpha}{x}}\right) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \text{ oppure } 4 < \alpha \leq 6, \\ -\pi/4 & \text{se } \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } 1 < \alpha < 4 \text{ oppure } 7 < \alpha, \\ -3\pi/4 & \text{se } \alpha = 4, \\ +\infty & \text{se } 6 < \alpha \leq 7. \end{cases}$$

Limitatamente ai casi $1/2 < \alpha \leq 7$ la soluzione poteva essere facilmente ottenuta studiando i grafici delle funzioni $f(\alpha) = \min\{2\alpha - 1, 2 + \frac{\alpha}{2}\}$ e $g(\alpha) = \min\{6, \alpha\}$. La funzione f rappresenta l'ordine di infinitesimo del numeratore, g quello del denominatore. Per gli α per cui $f(\alpha) > g(\alpha)$ il limite è zero, per quelli per i quali $f(\alpha) < g(\alpha)$ il limite è ∞ (il segno dipende dal segno della funzione in un intorno destro di 0, ed è facilmente negativo se $1/2 < \alpha \leq 6$, positivo se $6 < \alpha < 7$). Infine, per gli α per cui vale l'uguaglianza (che saranno $\alpha = 1$ e $\alpha = 4$) ci si aspetta un limite finito e non nullo da studiare caso per caso (vedi figura).