Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica I

Prova intermedia del 10 febbraio 2009

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Tempo a disposizione: 1.5 ore

1 Sia data la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_0 = \bar{a} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4a_n - 8}{2a_n - 2}. \end{cases}$$

a) Nel caso $\bar{a} = 3$ dimostrare, ad esempio per induzione, che a_n è ben definita e che $a_n > 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

b) dimostrare, ad esempio per induzione, che $a_n < 4$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

c) dimostrare che (a_n) è monotona strettamente crescente;

d) discutere l'esistenza e l'eventuale valore del limite di (a_n);

e) dimostrare che esiste $\bar{a} \in]1, 3/2[$ per il quale la relativa successione è periodica di periodo 2, ovvero è tale che $a_0 = a_2 = a_4 = \dots$, e $a_1 = a_3 = a_5 = \dots$, con $a_0 \neq a_1$ (in realtà converrebbe dimostrare che $\bar{a} \in]1, \sqrt{7} - 1[$);

f) calcolare esplicitamente $\bar{a}$ del punto e).

2 Dato il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln(\alpha x - 2x^2) - x \ln((4 - \beta)x + x^2)}{\beta^x - \alpha^{x+3x^2}},$$

a) calcolare il suo valore nel caso $\alpha = 1$, $\beta = 2$, e nel caso $\alpha = \beta = 3$;

b) discutere l'esistenza ed il valore al variare dei parametri $\alpha, \beta > 0$.

Soluzioni della prova intermedia del 10 febbraio 2009

$\boxed{\textbf{1a}}$ Per dimostrare che a_n è ben definita e $a_n > 2$ per ogni n, procediamo per induzione. Si ha $a_0 = 3 > 2$. Se poi supponiamo che a_n è definito e > 2 per un certo n allora $a_n \neq 1$ ed a_{n+1} è definito (il denominatore che lo definisce non si annulla). Inoltre

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n^2 + 4a_n - 8}{2a_n - 2} - 2 = \frac{a_n^2 - 4}{2a_n - 2} > 0,$$

cioè $a_{n+1} > 2$. Per il principio d'induzione si ha dunque che $a_n > 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{1b}}$ Procediamo per induzione. Si ha $a_0 < 4$; se poi supponiamo $a_n < 4$, poiché anche $a_n > 2$ grazie al punto a), segue che

$$4 - a_{n+1} = 4 - \frac{a_n^2 + 4a_n - 8}{2a_n - 2} = \frac{a_n(4 - a_n)}{2a_n - 2} > 0,$$

dunque $a_{n+1} < 4$. Per il principio d'induzione $a_n < 4$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{1c}}$ Si ha

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 4a_n - 8}{2a_n - 2} - a_n = \frac{(4 - a_n)(a_n - 2)}{2a_n - 2}$$

che è positivo per ogni n grazie ai punti a)-b). Quindi $a_{n+1} > a_n$ per ogni $n \geq \mathbb{N}$ e la successione è strettamente crescente.

$\boxed{\textbf{1d}}$ Per il teorema sul limite delle successioni monotone (a_n) ammette limite L, ed essendo la successione compresa in $]2, 4[$, per confronto tale limite deve appartenere a $[2, 4]$.

Passando al limite $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1} si ottiene che il limite L deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{L^2 + 4L - 8}{2L - 2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad L^2 - 6L + 8 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad L = 2 \text{ oppure } L = 4.$$

Poiché la successione è crescente e $a_0 = 3$, in definitiva si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = 4$.

$\boxed{\textbf{1e}}$ Basta dimostrare che esiste $\bar{a} \in]1, \sqrt{7} - 1[$ tale che $a_0 \neq a_1$ e $a_0 = a_2$ e automaticamente (per induzione!) $a_{2k+1} = a_1$ e $a_{2k} = a_0$ per ogni k. Posto $f(x) = \frac{x^2+4x-8}{2x-2}$, il numero $\bar{a}$ deve essere soluzione dell'equazione $x = f(f(x))$ e contemporaneamente non deve essere soluzione di $x = f(x)$. Siamo dunque ricondotti a cercare uno zero della funzione $g(x) := x - f(f(x))$. Per dimostrare che g ha uno zero in $]1, \sqrt{7} - 1[$ utilizziamo il teorema degli zeri (nella sua versione estesa con i limiti al posto dei valori agli estremi). Anzitutto dobbiamo vedere qual è il dominio di definizione: $f(f(x))$ e g sono definite per tutti gli x per cui f è definita (quindi $x \neq 1$) e $f(x) \neq 1$. Si ottiene facilmente che $f(x) = 1$ se e solo se $x = -1 - \sqrt{7}$ oppure $x = \sqrt{7} - 1$. In conclusione g è definita in $\mathbb{R} \setminus \{1, -\sqrt{7} - 1, \sqrt{7} - 1\}$ ed è ivi continua, essendo somma di composte di funzioni continue. In particolare g è definita e continua in $]1, \sqrt{7}-1[$. Calcoliamo ora il limiti per $x \to 1^+$ e $x \to (\sqrt{7}-1)^-$. Ciò può essere fatto senza calcolare esplicitamente g. Si ha

$$\lim_{x\to1^\pm} f(x) = \lim_{x\to1^\pm} \frac{x^2 + 4x - 8}{2x - 2} = \left[\frac{-3}{0^\pm}\right] = \mp\infty.$$

Inoltre f è strettamente crescente in $]1, +\infty[$, infatti $f(x) = \frac{1}{2}\big(x + 5 - \frac{3}{x-1}\big)$ è somma delle funzioni $x \mapsto \frac{x+5}{2}$ e $x \mapsto -\frac{3}{2(x-1)}$ che sono strettamente crescenti per $x > 1$. Utilizzando anche la continuità di f si ottiene che

$$\lim_{x\to(\sqrt{7}-1)^-} f(x) = f(\sqrt{7} - 1)^- = 1^-,$$

perciò, per il limite delle funzioni composte

$$\lim_{x\to1^+} f(f(x)) = \lim_{y\to-\infty} f(y) = \lim_{y\to-\infty} \frac{y^2 + 4y - 8}{2y - 2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to(\sqrt{7}-1)^-} f(f(x)) = \lim_{y\to 1^-} f(y) = +\infty,$$

di conseguenza $\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to(\sqrt{7}-1)^-} g(x) = -\infty$. Per il teorema degli zeri g ammette almeno uno zero $\bar{x}$ in $]1, \sqrt{7}-1[$ (in realtà si potrebbe verificare che è unico, vedi f)). Preso $\bar{a} = \bar{x}$ si ha $\bar{a} = f(f(\bar{a}))$ dunque $a_0 = a_2$. Infine osserviamo che le soluzioni dell'equazione $x = f(x)$ sono (facile calcolo già svolto in d)) $x = 2$, $x = 4$. Poiché $\bar{x} \neq 2, 4$ si ha $\bar{x} \neq f(\bar{x})$ dunque $a_0 \neq a_1$.

Si poteva anche calcolare esplicitamente g. Più precisamente si ha

$$f(f(x)) = \frac{\left(\frac{x^2+4x-8}{2x-2}\right)^2 + 4\frac{x^2+4x-8}{2x-2} - 8}{2\frac{x^2+4x-8}{2x-2} - 2} = \frac{(x^2+4x-8)^2 + 4(x^2+4x-8)(2x-2) - 8(2x-2)^2}{2(x^2+4x-8)(2x-2) - 2(2x-2)^2}$$
$$= \frac{x^4+16x^3-8x^2-96x+96}{4(x-1)(x^2+2x-6)} = \frac{x^4+16x^3-8x^2-96x+96}{4(x-1)(x+1+\sqrt{7})(x-(\sqrt{7}-1))},$$

da cui segue anche che

$$g(x) = \frac{3(x^4-4x^3-8x^2+40x-32)}{4(x-1)(x^2+2x-6)} = \frac{3(x^4-4x^3-8x^2+40x-32)}{4(x-1)(x+1+\sqrt{7})(x-(\sqrt{7}-1))}.$$

Grazie a quest'ultima formula si vede che la funzione g è continua in $]1, \sqrt{7}-1[$. A questo punto si potrebbero calcolare i limiti per $x \to 1^+$ e $x \to (\sqrt{7}-1)^-$ e concludere come sopra.

1f In questo caso è anche possibile calcolare esplicitamente $\bar{a}$ del punto e). Ciò equivale a trovare le radici del polinomio a numeratore della frazione che definisce g. L'osservazione fondamentale è che se x_0 è soluzione di $x = f(x)$ allora x_0 è anche soluzione di $x = f(f(x))$. Infatti, se $x_0 = f(x_0)$ allora $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$. Ma sappiamo già che 2 e 4 sono (le uniche) soluzioni di $x = f(x)$, perciò sono anche zeri di g. Questo ci permette di fattorizzare facilmente il numeratore di g; si ha dunque

$$g(x) = \frac{3(x^4-4x^3-8x^2+40x-32)}{4(x-1)(x^2+2x-6)} = \frac{3(x-2)(x-4)(x^2+2x-4)}{4(x-1)(x^2+2x-6)},$$

perciò gli altri zeri di g sono soluzioni di $x^2+2x-4 = 0$ cioè $x = -1-\sqrt{5}$ oppure $x = -1+\sqrt{5}$. Lo zero che cade nell'intervallo richiesto è $\bar{a} = \bar{x} = -1+\sqrt{5}$. Si osservi che $f(-1+\sqrt{5}) = -1-\sqrt{5}$ (era prevedibile, perché?), quindi $a_0 = -1+\sqrt{5}$, $a_1 = -1-\sqrt{5}$.

2a I seguenti limiti sono casi particolari del caso generale considerato in b). Se $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x-2x^2) - x\ln(2x+x^2)}{2^x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\dfrac{1-2x}{2+x}}{\dfrac{2^x-1}{x}} = \frac{\ln(1/2)}{\ln 2} = -1.$$

Se $\alpha = \beta = 3$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(3x-2x^2) - x\ln(x+x^2)}{3^x - 3^{x+3x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln\dfrac{3x-2x^2}{x+x^2}}{3^x(1-3^{3x^2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\dfrac{3-2x}{1+x}}{-3^{x+1}\dfrac{3^{3x^2}-1}{3x^2}x} = \left[\frac{\ln 3}{-3\ln 3\cdot 0^+}\right],$$

quindi il limite è uguale a $-\infty$.

2b Studiamo anzitutto il dominio di definizione della funzione per determinare se sia sensato calcolare il limite oppure no. Le funzioni a numeratore sono definite se $\alpha x - 2x^2 > 0$ e $(4-\beta)x + x^2 > 0$. Essendo $\alpha > 0$, la prima disuguaglianza è verificata per $0 < x < \alpha/2$. Per quanto concerne la seconda, dobbiamo distinguere due casi: se $\beta > 4$, ha soluzione quando $x < 0$ oppure $x > \beta - 4$, mentre se $\beta < 4$, ha soluzione quando $x < \beta - 4$ oppure $x > 0$. Infine, se $\beta = 4$ tale disuguaglianza è verificata se $x \neq 0$. In particolare, se $\beta > 4$ il punto $x_0 = 0$ non è di accumulazione a destra per la funzione $\ln((4-\beta)x + x^2)$, dunque non ha senso calcolare il limite.

Per quanto concerne il denominatore $D(x)$ si osserva immediatamente che se α e β sono contemporaneamente uguali a 1 la funzione $D(x)$ si annulla identicamente, dunque anche in questo caso non ha senso calcolare il limite richiesto. Altrimenti si può verificare (vedi sotto) che $x_0 = 0$ è effettivamente punto di accumulazione del dominio.

D'ora in avanti supporremo quindi $0 < \beta \leq 4$ e $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$. Per il momento limitiamoci al caso $\beta < 4$. Osserviamo che il numeratore può essere semplificato, infatti

$$\begin{aligned} & x\ln(\alpha x - 2x^2) - x\ln((4-\beta)x + x^2) \\ & \qquad = x \ln \frac{\alpha x - 2x^2}{(4-\beta)x + x^2} = x \ln \frac{\alpha - 2x}{(4-\beta) + x} = x\big(\ln(\alpha - 2x) - \ln((4-\beta) + x)\big), \end{aligned}$$

perciò ricordando anche il limite $\lim_{z\to 0} \frac{a^z - 1}{z} = \ln a$, si ottiene che

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(\alpha x - 2x^2) - x\ln((4-\beta)x + x^2)}{\beta^x - \alpha^{x+3x^2}} \\ & \qquad = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\alpha - 2x) - \ln((4-\beta) + x)}{\dfrac{\beta^x - 1}{x} - \dfrac{\alpha^{x+3x^2} - 1}{x + 3x^2}(1 + 3x)} = \left[\frac{\ln\alpha - \ln(4-\beta)}{\ln\beta - \ln\alpha}\right]. \end{aligned}$$

Se $\frac{\ln\alpha - \ln(4-\beta)}{\ln\beta - \ln\alpha}$ ha senso come numero reale, allora coincide col valore del limite. Ciò accade quando $\ln\beta - \ln\alpha \neq 0$ cioè $\alpha \neq \beta$. Osserviamo che in effetti abbiamo dimostrato che $\frac{\beta^x - \alpha^{x+3x^2}}{x} \to \ln\beta - \ln\alpha \neq 0$ quindi, per il teorema della permanenza del segno, tale funzione, e di conseguenza $\beta^x - \alpha^{x+3x^2}$, è non nulla in un intorno di $x_0 = 0$. Ciò garantisce che la funzione di partenza è definita in un intorno destro di $x_0 = 0$, dunque ha senso provare a calcolarne il limite.

Resta da considerare il caso $\alpha = \beta$, per il quale ci aspettiamo che il relativo limite si presenti nella forma $L/0$. Poiché il denominatore della funzione diventa $\alpha^x - \alpha^{x+3x^2}$ che è non nullo per $x > 0$ grazie all'iniettività della funzione esponenziale ($\alpha \neq 1$), anche in questo caso ha senso provare a calcolare il limite. Più precisamente, se $\alpha = \beta$ il limite si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(\alpha x - 2x^2) - x\ln((4-\alpha)x + x^2)}{\alpha^x - \alpha^{x+3x^2}} \\ & \qquad = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(\alpha - 2x) - x\ln((4-\alpha) + x)}{\alpha^x(1 - \alpha^{3x^2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}\left(\frac{\ln((4-\alpha) + x) - \ln(\alpha - 2x)}{\alpha^x \dfrac{\alpha^{3x^2} - 1}{3x^2}}\right). \end{aligned}$$

La funzione tra parentesi tende a $L_\alpha := \frac{\ln(4-\alpha) - \ln\alpha}{\ln\alpha}$. Se $L_\alpha > 0$, il che accade se e solo se $1 < \alpha < 2$, il limite si presenta nella forma $\frac{L_\alpha^+}{0^+} = +\infty$, mentre se $L_\alpha < 0$, cioè se $0 < \alpha < 1$ oppure $\alpha > 2$, il limite è della forma $\frac{L_\alpha^-}{0^+} = -\infty$.

Resta ancora da considerare il caso in cui $L_\alpha = 0$, ovvero $\alpha = 2$, per il quale il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sostituendo $\alpha = 2$ e ricordandosi del limite $\lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}\left(\frac{\ln(2+x) - \ln(2-2x)}{2^x \dfrac{2^{3x^2} - 1}{3x^2}}\right) = \frac{1}{3\ln 2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2+x) - \ln(2-2x)}{x} = \frac{1}{3\ln 2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln\frac{2+x}{2-2x} \\ & \qquad = \frac{1}{3\ln 2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{3x}{2-2x}\right) = \frac{1}{3\ln 2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1 + \frac{3x}{2-2x}\right)}{\frac{3x}{2-2x}} \frac{3}{2-2x} = \frac{1}{3\ln 2}\frac{3}{2} = \frac{1}{2\ln 2}. \end{aligned}$$

Consideriamo infine il caso $\beta = 4$, per il quale si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(\alpha x - 2x^2) - x\ln((4-\beta)x + x^2)}{\beta^x - \alpha^{x+3x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\alpha - 2x) - \ln x}{\dfrac{4^x - \alpha^{x+3x^2}}{x}} = \left[\frac{+\infty}{\ln 4 - \ln\alpha}\right].$$

Se dunque $\alpha < 4$ il limite è $+\infty$, se $\alpha > 4$ il limite è $-\infty$. Infine, se anche $\alpha = 4$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(\alpha x - 2x^2) - x\ln((4-\beta)x + x^2)}{\beta^x - \alpha^{x+3x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(4 - 2x) - \ln x}{\dfrac{4^x - 4^{x+3x^2}}{x}} = \left[\frac{+\infty}{0^-}\right] = -\infty.$$

Ricapitolando

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(\alpha x - 2x^2) - x\ln((4-\beta)x + x^2)}{\beta^x - \alpha^{x+3x^2}} = \begin{cases} \frac{\ln\alpha - \ln(4-\beta)}{\ln\beta - \ln\alpha} & \text{se } \beta < 4,\ \alpha \neq \beta, \\ +\infty & \text{se } \beta = 4,\ \alpha < \beta, \\ -\infty & \text{se } \beta = 4,\ \alpha \geq \beta, \\ +\infty & \text{se } \alpha = \beta,\ 1 < \alpha < 2, \\ -\infty & \text{se } \alpha = \beta,\ 0 < \alpha < 1 \text{ oppure } 2 < \alpha < 4, \\ \frac{1}{2\ln 2} & \text{se } \alpha = \beta = 2, \\ \text{non esiste} & \text{se } \beta > 4 \text{ oppure } \alpha = \beta = 1. \end{cases}$$