Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 15/09/2009
A.A. 2008/2009

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f''(x_0) = 0$ e $f'(x_0) > 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = y(t+y)$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

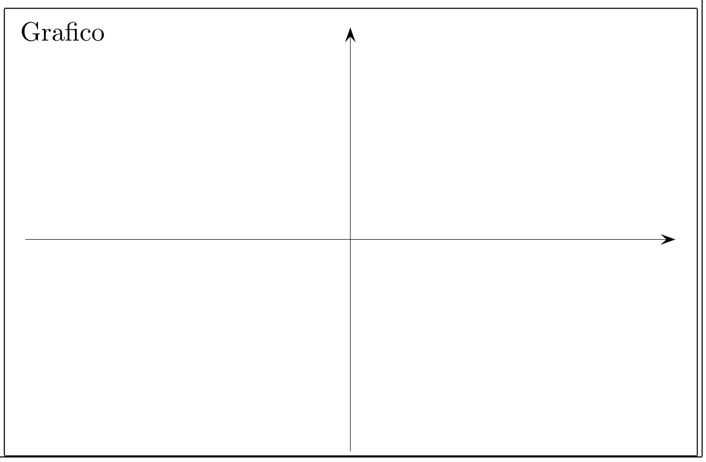
4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2x^2+1}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$



6 Per definizione, una primitiva di una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ è:

7 Descrivere con precisione le relazioni tra la derivata seconda e il grafico di una funzione f

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\,\mathrm{e}^{2t}\,3^y \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \operatorname{sen}(\pi t)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

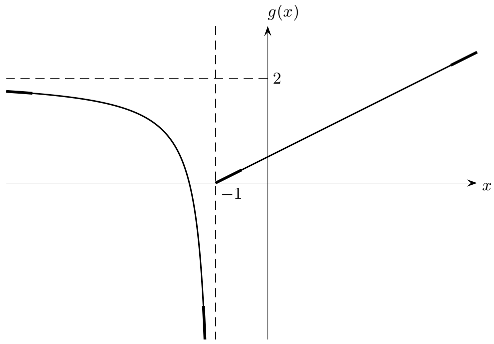
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{2+x^2}{1+x^2} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx, \qquad \int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^{3x}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 15 settembre 2009

$\boxed{\mathbf{1}}$ C; $\boxed{\mathbf{2}}$ D; $\boxed{\mathbf{3}}$ C; $\boxed{\mathbf{4}}$ D; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita per gli x tali che $x^2 - 3x + 3 > 0$, disequazione vera per ogni $x \in \mathbb{R}$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Essendo composizione di funzioni continue e derivabili, la funzione è continua e derivabile nel dominio.

b) La funzione è ≥ 0 se e solo se $x^2 - 3x + 3 \geq 1$ ovvero $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ che è verificata se e solo se $x \leq 1$ oppure $x \geq 2$. In definitiva la funzione è positiva in $]-\infty, 1[$ e in $]2, +\infty[$, negativa in $]1, 2[$, mentre si annulla in $x = 1$ e $x = 2$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti a $\pm\infty$. Poiché l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$ se $x \to \pm\infty$, si ha facilmente

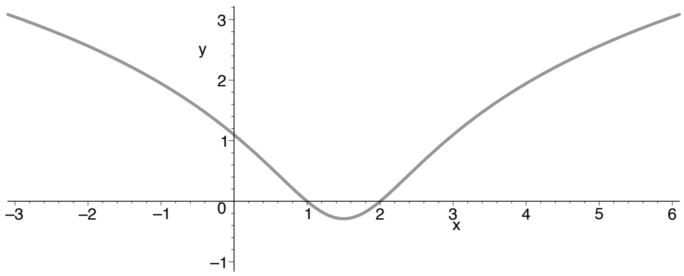
$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo.

d) La derivata prima di g è

$$g'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 3}.$$

Poiché per a) il denominatore è sempre positivo, la derivata è ≥ 0 se e solo se $2x - 3 \geq 0$ cioè $x \geq 3/2$, perciò la funzione è crescente in $]3/2, +\infty[$, mentre è decrescente in $]-\infty, 3/2[$. In $x = 3/2$ ammette un minimo assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{2(x^2 - 3x + 3) - (2x - 3)^2}{(x^2 - 3x + 3)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 3}{(x^2 - 3x + 3)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo, la derivata seconda è ≥ 0 se $-2x^2 + 6x - 3 \geq 0$ ovvero $2x^2 - 6x + 3 \leq 0$ le cui soluzioni sono $\frac{3-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{ oppure } x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \\ > 0, & \text{se } x \in]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[$ e in $]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, mentre è convessa in $]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}[$. In $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ammette due punti di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = \pi \cos(\pi t)$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$\pi \cos(\pi t) = t\, \mathrm{e}^{2t} 3^{\mathrm{sen}(\pi t)},$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $\pi \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(1) = 0$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{3^y}\, dy = t\, \mathrm{e}^{2t}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int 3^{-y}\, dy = \int t\, \mathrm{e}^{2t}\, dt.$$

Utilizzando le tabelle si ha facilmente

$$\int 3^{-y}\, dy = -\frac{3^{-y}}{\ln 3},$$

mentre integrando per parti si ottiene

$$\int t\, \mathrm{e}^{2t}\, dt = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\, dt = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4},$$

perciò in definitiva

$$-\frac{3^{-y}}{\ln 3} = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene

$$3^y = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} - t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - c\right)\ln 3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \log_3\left(\frac{4}{(\mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^{2t} - 4c)\ln 3}\right).$$

Imponendo la condizione $y(1) = 0$, ad esempio nella prima delle precedenti relazioni, si ottiene

$$1 = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - c\right)\ln 3},$$

da cui si ricava $c = -\frac{1}{\ln 3} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_3\left(\frac{4}{(\mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^2)\ln 3 + 4}\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_0^y 3^{-z}\, dz = \int_1^t s\, \mathrm{e}^{2s}\, ds \qquad \Longrightarrow \qquad \left[-\frac{3^{-z}}{\ln 3}\right]_0^y = \left[s\frac{\mathrm{e}^{2s}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2s}}{4}\right]_1^t$$

$$\Longrightarrow \qquad -\frac{3^{-y}}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} = t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}\right),$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{2 + x^2}{1 + x^2} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx = \int 1\, dx + \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx + 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = x + \mathrm{arctg}\, x + 3\,\mathrm{tg}\, x + c,$$

con c costante arbitraria. Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^{3x}}\, dx = \int_0^1 x\, \mathrm{e}^{-3x}\, dx = \left[x\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3}\, dx = -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9}\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{-3}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9\mathrm{e}^3}.$$