Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 03/09/2009
A.A. 2008/2009

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - g(x)\big)$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) > 0$ e $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y'' = 3ty - \sqrt{y'}$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \pi - \sqrt{e^2+1}$ rappresenta

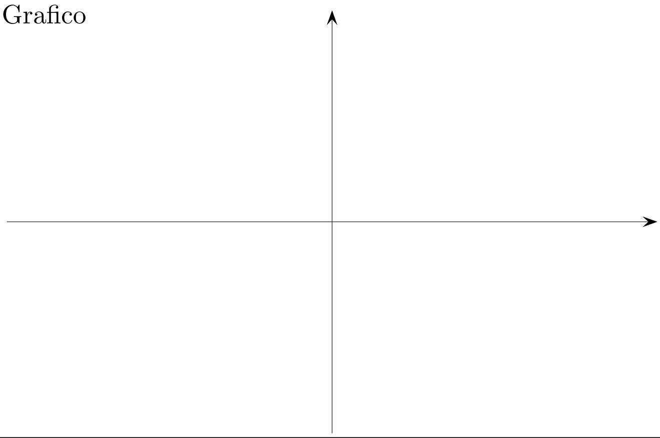
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 La derivata di una funzione f nel punto x_0 rappresenta:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to0^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{1-x^2}{(x+2)^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(2+\ln y)\cos t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2t}$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

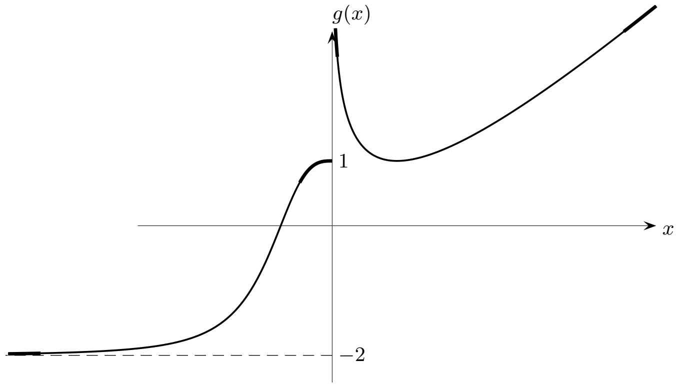
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{\sqrt{x}-5}{3x} + \frac{2}{3^x}\right) dx, \qquad \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{3x}}{5+\mathrm{e}^{3x}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 3 settembre 2009

$\boxed{1}$ A; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ D; $\boxed{4}$ A; $\boxed{5}$-$\boxed{6}$-$\boxed{7}$ consultare il libro di testo; $\boxed{8}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{9}$ a) La funzione è definita per gli x tali che $x+2 \neq 0$ cioè $x \neq -2$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile.

b) Il denominatore è sempre positivo, il numeratore è ≥ 0 quando $1 - x^2 \geq 0$ cioè $-1 \leq x \leq 1$. In definitiva la funzione è positiva in $]-1, 1[$, negativa in $]-\infty, -1[$ e in $]1, +\infty[$, mentre si annulla in $x = -1$ e $x = 1$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -2 e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x^2 - 1}{(1 + 1/x)^2} = \left[\frac{-1}{1}\right] = -1,$$

$$\lim_{x\to-2} g(x) = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty,$$

quindi la funzione non ammette minimo.

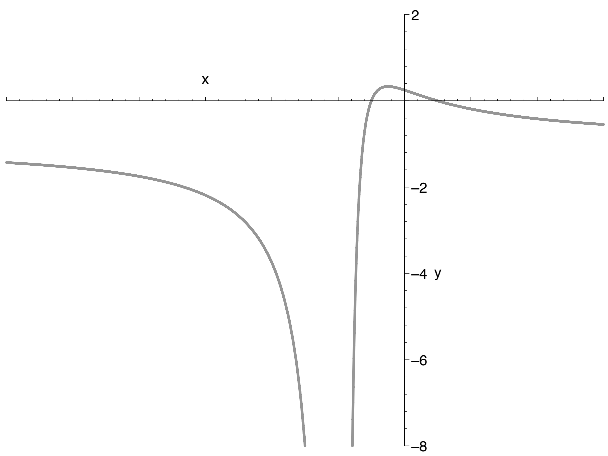
d) La derivata prima di g è

$$g'(x) = \frac{-2x(x+2)^2 - (1-x^2)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-2x(x+2) - (1-x^2)2}{(x+2)^3} = \frac{-(4x+2)}{(x+2)^3}.$$

Il numeratore è positivo se $-(4x+2) \geq 0$ ovvero se $x \leq -1/2$, il denominatore è positivo se $(x+2)^3 > 0$ cioè se $x+2 > 0$ ovvero $x > -2$. In definitiva

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-2, -1/2[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]-1/2, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-2, -1/2[$, mentre è decrescente in $]-\infty, -2[$ e in $]-1/2, +\infty[$. In $x = -1/2$ ammette un massimo assoluto.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = -\frac{4(x+2)^3 - (4x+2)3(x+2)^2}{(x+2)^6} = -\frac{4(x+2) - (4x+2)3}{(x+2)^4} = \frac{8x-2}{(x+2)^4}.$$

Il numeratore è ≥ 0 se $x \geq 1/4$, mentre il denominatore è sempre positivo nel dominio, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 1/4[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/4, \\ > 0, & \text{se } x \in]1/4, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-\infty, -2[$ e in $]-2, 1/4[$, mentre è convessa in $]1/4, +\infty[$. In $x = 1/4$ ammette un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = 2e^{2t}$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$2e^{2t} = e^{2t}(2 + \ln e^{2t}) \cos t,$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = \pi/2$ si ottiene $2e^{\pi} \neq 0$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(0) = 1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y(2+\ln y)}\, dy = \cos t\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{y(2+\ln y)}\, dy = \int \cos t\, dt.$$

Ricordando che una primitiva del coseno è il seno e utilizzando le tabelle si ottiene

$$\int \frac{1}{y(2+\ln y)}\, dy = \int \frac{(\ln y)'}{2+\ln y}\, dy = \ln|2+\ln y| \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|2+\ln y| = \operatorname{sen} t + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Osservando che dovrà essere $y(0) = 1$, si può supporre (almeno per i t vicini a 0) che $2 + \ln y(t) > 0$, perciò risolvendo in y si ottiene

$$2 + \ln y = e^{\operatorname{sen} t + c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \exp\left(e^{\operatorname{sen} t + c} - 2\right).$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene $2 = e^c$, da cui si ricava $c = \ln 2$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \exp\left(2e^{\operatorname{sen} t} - 2\right).$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y \frac{1}{z(2+\ln z)}\, dz = \int_0^t \cos s\, ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\ln|2+\ln z|\Big]_1^y = \Big[\operatorname{sen} s\Big]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \ln|2+\ln y| - \ln 2 = \operatorname{sen} t,$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \left(\frac{\sqrt{x}-5}{3x} + \frac{2}{3^x}\right) dx = \frac{1}{3}\int x^{-1/2}\, dx - \frac{5}{3}\int \frac{1}{x}\, dx + 2\int (1/3)^x\, dx = \frac{1}{3}\frac{x^{1/2}}{1/2} - \frac{5}{3}\ln|x| + 2\frac{(1/3)^x}{\ln(1/3)} + c$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{5}{3}\ln|x| - \frac{2}{3^x \ln 3} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_1^2 \frac{e^{3x}}{5+e^{3x}}\, dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{(e^{3x})'}{5+e^{3x}}\, dx = \frac{1}{3}\Big[\ln(5+e^{3x})\Big]_1^2 = \frac{1}{3}\big(\ln(5+e^6) - \ln(5+e^3)\big) = \frac{1}{3}\ln\frac{5+e^6}{5+e^3}.$$