Facoltà di Agraria

Corsi di Laurea in VIT e STAL
Modulo di Matematica
Esame del 07/07/2009
A.A. 2008/2009

Scritto		Voto
Teoria	Esercizi	

Istruzioni: apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato. Svolgere solamente uno tra 10-b) e 11. Allegare lo svolgimento completo degli esercizi 9, 10 e 11. **Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici grafiche o programmabili.**

Cognome	Nome
Corso di Laurea $\boxed{VIT}$ $\boxed{STAL}$	Matricola
Vecchio ordinamento $\boxed{SI}$ $\boxed{NO}$	n. fogli (compreso questo)

1 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

- A $-\infty$
- B $+\infty$
- C 0
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

2 Se f è una funzione derivabile due volte in $]a,b[$ e vale $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a,b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

3 L'equazione differenziale $y' = t^2\sqrt{t} - y\ln t$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

4 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{5}x - 1}{3 + \pi x}$ rappresenta

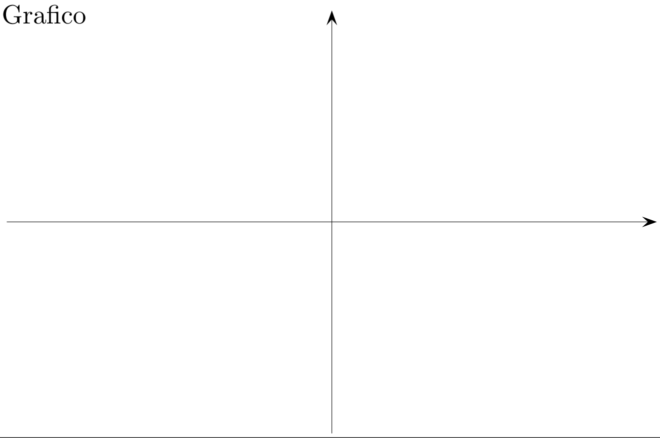
- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

5 Per la funzione $f(x) = \log_{5/9} x$, scrivere il dominio $\mathcal{D}$, l'immagine $\mathcal{I}$, e rappresentare qualitativamente il grafico.

$\mathcal{D} =$

$\mathcal{I} =$

Grafico



6 Per definizione, la derivata di una funzione f nel punto x_0 è:

7 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

8 Rappresentare il grafico di una funzione g che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$$

9 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$, b) studiare il segno di g; c) calcolare i limiti agli estremi del dominio; d) determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, quelli in cui è decrescente, e gli eventuali punti di massimo/minimo relativo; e) determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e quelli in cui è concava; f) disegnare un grafico approssimativo di g.

10 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^2 y^4}{\sqrt{t^3+1}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \cos(t^3)$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema nel caso in cui non lo sia la funzione di cui al punto precedente.

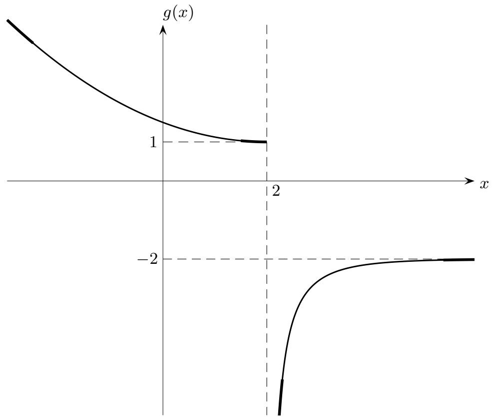
11 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3\cos^2 x - 4}{\cos^2 x} - \frac{5}{x\sqrt{x}}\right) dx, \qquad \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt[3]{3-2\cos t}}\, dx.$$

IMPORTANTE! Risolvere solamente uno tra 10-b) e 11.

Soluzioni dei quesiti dell'esame del 7 luglio 2009

$\boxed{\mathbf{1}}$ D; $\boxed{\mathbf{2}}$ B; $\boxed{\mathbf{3}}$ A; $\boxed{\mathbf{4}}$ C; $\boxed{\mathbf{5}}$-$\boxed{\mathbf{6}}$-$\boxed{\mathbf{7}}$ consultare il libro di testo; $\boxed{\mathbf{8}}$ in neretto si evidenziano le informazioni date dai limiti. Il grafico della funzione è quindi completato a piacere (linea sottile), ad esempio:



$\boxed{\mathbf{9}}$ a) La funzione è definita per gli x tali che $1 - x^2 \neq 0$ cioè $x \neq -1$, $x \neq 1$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e la funzione (razionale) è ivi continua e derivabile. Osserviamo inoltre che la funzione è dispari, dunque il suo grafico può essere studiato solamente per $x \geq 0$, ottenendo quello relativo a $x < 0$ per simmetria rispetto all'origine.

b) Il numeratore è ≥ 0 se $x \geq 0$, il denominatore quando $1 - x^2 > 0$ cioè $-1 < x < 1$. In definitiva la funzione è positiva in $]-\infty, -1[$ e in $]0, 1[$, negativa in $]-1, 0[$ e in $]1, +\infty[$, mentre si annulla in $x = 0$.

c) Ha senso andare a studiare i limiti in -1, in 1 e a $\pm\infty$. Tenuto conto anche di b), si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1/x^2 - 1} = \left[\frac{\pm\infty}{-1}\right] = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^\pm} g(x) = \left[\frac{-1}{0^\pm}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

quindi la funzione non ammette massimo né minimo.

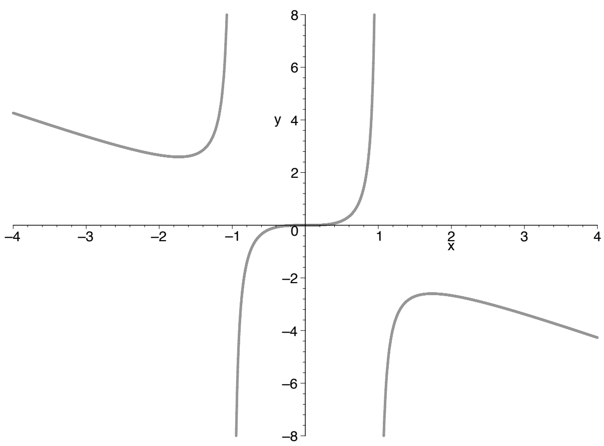
d) La derivata prima di g è

$$g'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

La derivata prima si annulla in $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$, mentre è positiva se e solo se $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt{3}, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \sqrt{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = 1 \text{ oppure } x = -\sqrt{3} \text{ oppure } x = \sqrt{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[, \end{cases}$$

perciò la funzione è crescente in $]-\sqrt{3}, -1[$, in $]-1, 1[$ e in $]1, \sqrt{3}[$, mentre è decrescente in $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e in $]\sqrt{3}, +\infty[$. In $x = -\sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ ammette, rispettivamente un minimo e un massimo relativo. In $x = 0$ la funzione ha un flesso a tangente orizzontale.



e) La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{(6x-4x^3)(1-x^2)^2 - (3x^2-x^4)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}$$
$$= \frac{(6x-4x^3)(1-x^2) + 4x(3x^2-x^4)}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^3+6x}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Il numeratore è positivo se $x \geq 0$, mentre il denominatore è positivo se $(1-x^2)^3 > 0$ ovvero se $1-x^2 > 0$ cioè $-1 < x < 1$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[, \end{cases}$$

perciò la funzione è concava in $]-1,0[$ e in $]1,+\infty[$, mentre è convessa in $]-\infty,-1[$ e in $]0,1[$. Come già osservato, $x=0$ è un punto di flesso.

10 a) Si ha $y'(t) = -3t^2 \operatorname{sen}(t^3)$. Sostituendo si ottiene l'equazione

$$-3t^2 \operatorname{sen}(t^3) = \frac{t^2(\cos(t^3))^4}{\sqrt{t^3+1}},$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = \sqrt[3]{\pi}$ si ottiene $0 \neq \frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{\sqrt{\pi+1}}$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che la funzione soddisfa la seconda condizione $y(0)=1$.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$ e utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$\frac{1}{y^4}\,dy = \frac{t^2}{\sqrt{t^3+1}}\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int y^{-4}\,dy = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^3+1}}\,dt,$$

e utilizzando le tabelle

$$\frac{y^{-3}}{-3} = \frac{1}{3}\int (3t^2)(t^3+1)^{-1/2}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{3y^3} = \frac{1}{3}\frac{(t^3+1)^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{t^3+1} + c,$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo in y si ottiene

$$y^3 = \frac{1}{c - 2\sqrt{t^3+1}} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{c-2\sqrt{t^3+1}}}.$$

Imponendo la condizione $y(0)=1$ si ottiene $1 = \frac{1}{c-2}$, da cui si ricava $c=3$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{t^3+1}}}.$$

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^{-4}\,dz = \int_0^t \frac{s^2}{\sqrt{s^3+1}}\,ds \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{z^{-3}}{-3}\right]_1^y = \left[\frac{2}{3}\sqrt{s^3+1}\right]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{3y^3} = \frac{2}{3}\sqrt{t^3+1} - \frac{2}{3},$$

che risolta rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

11 Dalle tabelle si ottiene

$$\int \Big(\frac{3\cos^2 x - 4}{\cos^2 x} - \frac{5}{x\sqrt{x}}\Big)\,dx = \int 3\,dx - 4\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 5\int x^{-3/2}\,dx = 3x - 4\operatorname{tg} x - 5\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + c,$$

con c costante arbitraria. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt[3]{3-2\cos t}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (2\operatorname{sen} t)(3-2\cos t)^{-1/3}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{(3-2\cos t)^{2/3}}{2/3}\Big]_0^\pi = \frac{3}{4}(5^{2/3}-1).$$