

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Programma del Corso di Analisi Matematica 8
Docente: Paolo Baiti

Preliminari e strumenti matematici. Integrazione di funzioni su varietà parametriche. La formula di integrazione sulle sfere. La funzione gamma di Eulero sui numeri reali positivi e le sue proprietà fondamentali. Il calcolo del volume della palla n -dimensionale e della misura della sfera $(n - 1)$ -dimensionale. Punti regolari e frontiera regolare di un aperto di $\mathbb{R}^n$. Il vettore unitario normale. Teorema della divergenza. Teorema del gradiente. Formula di integrazione per parti. Formule di Green. Il prodotto di convoluzione. Convoluzione di funzioni L^1 . La convoluzione e la derivazione. I nuclei di convoluzione. Unità approssimate. Convoluzione con mollificatori. Approssimazione di funzioni integrabili mediante funzioni C^∞ e C^∞ a supporto compatto. Lemma di Urysohn, versione C^∞ . La trasformata di Fourier in L^1 . Proprietà della trasformata di Fourier. La trasformata di Fourier e la derivazione. Inversione della trasformata di Fourier. La trasformata di Fourier nello spazio di Schwartz e in L^2 . Il teorema di Plancherel.

Le equazioni differenziali alle derivate parziali. Equazioni differenziali alle derivate parziali di ordine k (PDE) . Il concetto di soluzione classica. Il problema di Dirichlet e il problema di Neumann. Equazioni lineari, semilineari, quasilineari e totalmente nonlineari. Alcuni esempi di PDE. La nozione di problema ben posto. Il principio di sovrapposizione per le equazioni lineari.

L'equazione del trasporto. L'equazione omogenea del trasporto. Il problema ai valori iniziali e la formula risolutiva nel caso dei dati di classe C^1 . L'equazione non omogenea del trasporto. Il problema ai valori iniziali e la formula risolutiva nel caso dei dati di classe C^1 . Il principio di Duhamel per problemi lineari di evoluzione. Applicazioni al caso dell'equazione del trasporto. Unicità della soluzione e dipendenza continua rispetto ai dati iniziali.

L'equazione di Laplace e l'equazione di Poisson. L'equazione di Laplace e l'equazione di Poisson. Le funzioni armoniche. Il caso di dimensione 1. Il caso di dimensione 2: relazione con le funzioni olomorfe. Il Laplaciano è invariante per rotazioni. Le soluzioni a simmetria radiale. La soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace. Funzioni sub- e super-armoniche. Il principio debole del massimo per funzioni sub-armoniche, e il principio debole del minimo per funzioni super-armoniche. Unicità della soluzione classica del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson su aperti limitati. La formula di rappresentazione integrale di Green. Il problema di Dirichlet per il Laplaciano e la funzione di Green. La funzione di Green sulla palla. Simmetria della funzione di Green. Proprietà della funzione

di Green. Il nucleo di Poisson sulla palla e sue proprietà. Il problema di Dirichlet per il Laplaciano sulla palla con dati continui al bordo: esistenza ed unicità. Cenni al caso dei dati non continui. Il problema di Dirichlet per il Laplaciano sul semispazio con dati continui al bordo. Il nucleo di Poisson sul semispazio. Teorema di esistenza di una soluzione. Il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson: formula di rappresentazione. I teoremi delle medie integrali per le funzioni armoniche. La regolarità delle funzioni armoniche. Il principio del massimo e minimo forte per le funzioni armoniche. Il teorema di Liouville. Il metodo dell'energia. Il principio di Dirichlet.

L'equazione del calore. L'equazione del calore. Formula risolutiva per il problema omogeneo ai valori iniziali per l'equazione del calore. La soluzione fondamentale e le sue proprietà. Il problema non omogeneo ai valori iniziali per l'equazione del calore. L'equazione del calore su domini limitati. Il principio del massimo debole. Unicità della soluzione su domini limitati. Il metodo dell'energia. Il principio del massimo forte (senza dim). La proprietà di media per le soluzioni dell'equazione del calore (senza dim). Principio del massimo in $\mathbb{R}^n$. Teorema di unicità per l'equazione in $\mathbb{R}^n$. Regolarità delle soluzioni. Il problema retrogrado per l'equazione del calore è mal posto.

L'equazione delle onde. L'equazione delle onde. Il problema omogeneo ai valori iniziali nel caso unidimensionale: la formula di d'Alambert. Il caso della corda vibrante fissata ad un estremo; il metodo di riflessione. Il dominio di dipendenza e il cono di influenza. Velocità finita di propagazione. Il problema omogeneo ai valori iniziali nel caso $n = 3$: il metodo delle medie sferiche. Il problema omogeneo ai valori iniziali nel caso $n = 2$: il metodo della discesa. Cenni al caso $n \geq 4$. Il principio di Huygens. Il problema non omogeneo ai valori iniziali. L'unicità delle soluzioni per il problema misto e per il problema ai valori iniziali. Il metodo dell'energia. Dominio di dipendenza e velocità finita di propagazione.

Il metodo di separazione delle variabili. Il metodo di separazione delle variabili. Richiami sulle serie di Fourier. Serie di Fourier trigonometriche. Serie di Fourier in L^2 e completezza della base trigonometrica. Disuguaglianza di Bessel e uguaglianza di Parseval. Lemma di Riemann-Lebesgue. Sviluppo in serie di seni e di coseni. Teoremi sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier. Cenni alla convergenza puntuale delle serie di Fourier. Esempi. Applicazioni del metodo di separazione delle variabili: il problema misto per l'equazione omogenea del calore unidimensionale; il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sulla palla 2-dimensionale; il problema della corda vibrante fissata ai due estremi. Estensione del metodo di separazione delle variabili: il metodo di Fourier per il problema misto per l'equazione non omogenea del calore unidimensionale.