Capitolo 21

Il teorema di Weierstrass

Teorema 21.1 (di Bolzano-Weierstrass) *Ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente.*

DIMOSTRAZIONE Sia (x_n) una successione limitata. Allora esiste un intervallo $I = [a, b]$ tale che $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Utilizziamo ora un procedimento di bisezione di I per selezionare una sottosuccessione convergente di (x_n). Consideriamo il punto

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Allora uno dei due intervalli $[a, c]$ o $[c, b]$ deve contenere x_n per un numero infinito di indici n. Può naturalmente succedere che tutti e due gli intervalli siano di questo tipo, ma non può accadere, siccome i numeri naturali sono infiniti, che entrambi contengano solo un numero finito di termini della successione; si osservi inoltre che questo vale anche se la successione dovesse essere costante da un certo indice in poi. Scegliamo questo intervallo (o uno dei due se entrambi contengono un numero infinito di termini della successione) e lo chiamiamo $[a_1, b_1]$. Si ha

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Sia x_{n_1} qualunque elemento della successione (x_n) che appartiene a $[a_1, b_1]$. Sia ora

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

e, ripetendo il ragionamento, consideriamo quello tra i due intervalli $[a_1, c_1]$ e $[c_1, b_1]$ che contenga x_n $(n > n_1)$ per un numero infinito di n e lo chiamiamo

$[a_2, b_2]$. Sia x_{n_2} un qualunque elemento della successione (x_n) $(n > n_1)$ che appartiene a $[a_2, b_2]$. Continuando in questa maniera costruiamo tre successioni a_k, b_k e x_{n_k} tali che

1. a_k è crescente e b_k è decrescente;
2. $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;
3. $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di (x_n);
4. $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Poiché (a_k) è monotona e limitata (superiormente da b e inferiormente da a) allora esiste il $\lim_{k\to+\infty} a_k = \bar{x}$ e per la *2.* anche $\lim_{k\to+\infty} b_k = \bar{x}$ cosicché per la *4.* e il teorema del confronto si ha $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. □

Corollario 21.2 *Ogni successione di numeri reali possiede una sottosuccessione che ammette limite.*

DIMOSTRAZIONE Se la successione (x_n) è limitata, allora per il teorema precedente ammette una sottosuccessione convergente.

Se, invece, la successione (x_n) non è limitata, allora non lo è inferiormente oppure superiormente. Supponiamo che (x_n) non sia limitata superiormente (il caso in cui (x_n) non è limitata inferiormente si tratta in modo analogo). Dimostriamo allora che (x_n) possiede una sottosuccessione divergente a $+\infty$. Infatti, poiché la successione non è limitata superiormente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste n_k tale che $x_{n_k} > k$.

Osserviamo che (x_{n_k}) non è necessariamente una sottosuccessione di (x_n) perché l'applicazione $k \to n_k$ non è detto che sia strettamente crescente. Per ottenere una sottosuccessione basta modificare leggermente il procedimento precedente. Infatti, dato $k = 1$ esiste x_{n_1} tale che $f(x_{n_1}) > 1$. Procedendo per induzione, una volta definito x_{n_k}, sia $n_{k+1} > n_k$ tale che $f(x_{n_{k+1}}) > k+1$. In questo modo si definisce una sottosuccessione di (x_n) tale che $f(x_{n_k}) > k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per il teorema del confronto

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = +\infty.$$

Teorema 21.3 (di Weierstrass) *Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono*

$$\min_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad \max_{[a,b]} f.$$

Dimostrazione Dimostriamo l'esistenza del minimo. Per il massimo si procede analogamente (scrivere la dimostrazione in questo caso per esercizio). Prima di tutto dimostriamo che posto

$$m = \inf_{[a,b]} f$$

esiste una successione $x_n \in [a,b]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m.$$

Infatti, se $m = -\infty$ allora, per definizione, la funzione f non è limitata inferiormente e quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) < -n$ e perciò $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty = m$. Se, invece, $m \in \mathbb{R}$ allora m è il massimo dei minoranti dell'immagine di f, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$, $m + 1/n$ che è più grande di m non può essere un minorante, cioè deve esistere $x_n \in [a,b]$ tale che

$$f(x_n) < m + \frac{1}{n}$$

e poiché d'altra parte

$$m \leq f(x_n)$$

allora per il teorema del confronto si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = m$.

Applicando il teorema di Bolzano-Weierstrass alla successione limitata (x_n), si ottiene una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente ad un numero reale $\bar{x}$. Poiché l'insieme di definizione $[a,b]$ è chiuso, allora $\bar{x} \in [a,b]$.

Inoltre, poiché $(f(x_{n_k}))$ è una sottosuccessione di $(f(x_n))$ e quest'ultima converge ad m allora anche $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = m$. Per la continuità di f si ha allora che

$$m = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$

e questo prova l'asserto. □

Del Teorema precedente si può dare una generalizzazione.

Definizione 21.4 *Una funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *si dice* sequenzialmente semicontinua inferiormente *se per ogni successione* (x_n) *con* $x_n \in [a,b]$ *per ogni* n

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(\bar{x})$$

Teorema 21.5 (di Weierstrass 2) *Sia f una funzione sequenzialmente semicontinua inferiormente in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume minimo in $[a, b]$, cioè esiste*

$$\min_{[a,b]} f.$$

DIMOSTRAZIONE Dimostriamo l'esistenza del minimo. Come nel teorema precedente si riesce a trovare una successione (x_{n_k}) tale che $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$ e $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = m$, dove m è l'estremo inferiore di f in $[a, b]$. Per la semicontinuità di f si ha

$$m = \liminf_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) \geq f(\bar{x}).$$

D'altro canto, essendo $\bar{x} \in [a, b]$, si ha $f(\bar{x}) \geq m$ e quindi necessariamente $m = f(\bar{x})$, da cui l'asserto. $\square$