Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Esercizi di Analisi Matematica 1

Esercizi del 10 novembre 2005, da consegnare

1 Calcolare, qualora esistano, i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}\right)$ **b)** $\lim_{t\to 1}\dfrac{t^2+4t+\cos(\pi t)}{t^5(1-t)\ln t}$

c) $\lim_{y\to +\infty}\operatorname{tg}\left(\dfrac{y^2+3y-1}{4y^2+2+y^3}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{y^8+3y^3+1}{1-3y^5}\right)$ **d)** $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{3(1-\cos\sqrt{x^3})+5\sqrt[3]{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2x^{5/6}-\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}x^2}$

2 Data la funzione $f:\mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$

$$f(x)=\begin{cases}(1-a)x^2-3a^2x+10 & \text{se } x<1\\ 3-2x & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

a) determinare per quali valori del parametro reale a, la funzione f è continua in $\mathbb{R}$;

b) per tali valori dire se la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare la legge della funzione inversa.

3 Dimostrare che la successione $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$ non ammette limite.

4 Data la funzione $f(x)=\sqrt{x}$

a) verificare che per ogni $x_0>0$, f è lipschitziana su $[x_0,+\infty[$;

b) verificare che f non è lipschitziana su $]0,+\infty[$.

5 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che

$$|f(x)-f(y)|\leq |x-y|^p$$

per ogni $x,y\in\mathbb{R}$, dove $p>1$.

a) verificare, utilizzando le derivate (solo per chi le conosce), che f è una funzione costante;

b) verificare che f è una funzione costante senza utilizzare le derivate.