Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Esercizi di Analisi Matematica 1

Esercizi del 13 ottobre 2005, da consegnare

Esercizio 1. Utilizzando gli assiomi di campo ordinato di $\mathbb{R}$ dimostrare che

a) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ per ogni $x, y \neq 0$;
b) $0 \leq x \leq y$, $0 \leq x' \leq y' \Longrightarrow x \cdot x' \leq y \cdot y'$

Esercizio 2. Dato l'insieme
$$A = \left\{ \frac{3n+2}{n} :\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$
verificare che 5 è il massimo di A e, utilizzando le proprietà caratterizzanti dell'estremo inferiore, che 3 è l'estremo inferiore di A. È anche il minimo?

Esercizio 3. Dato l'insieme
$$A = \left\{ \frac{1-n}{1+n} :\ n \in \mathbb{N} \right\}$$
determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 4. Siano $a, x \geq 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dimostrare che
$$x^n < a \implies \exists\, w \in \mathbb{R},\ x < w,\ w^n < a$$
utilizzando solamente gli assiomi e le proprietà di $\mathbb{R}$. (Suggerimento: trovare una forma esplicita di w).

Esercizio 5. Siano dati due sottoinsiemi non vuoti $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ tali che $A \cup B = \mathbb{Q}$ e tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a_\varepsilon \in A$, $b_\varepsilon \in B$ tali che $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$.

Esercizio 6. Dato l'insieme
$$A = \left\{ \frac{n}{m} - \frac{m}{n} :\ n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n > m \right\}$$
determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 7. Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ tali che $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ e sia dato l'insieme
$$A = \left\{ \frac{\alpha m + \beta n}{\gamma m + \delta n} :\ n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$
determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 8. Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2+4} \;:\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 9. Dato l'insieme

$$A = \left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 10. Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n+m}{2} - \sqrt{mn} \;:\; n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore, eseguire la verifica e dire se sono rispettivamente massimo o minimo dell'insieme.

Esercizio 11. Dati A, B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, definiamo gli insiemi

$$A + B := \{a + b :\; a \in A,\, b \in B\}$$
$$A \cdot B := \{ab :\; a \in A,\, b \in B\}$$
$$\gamma \cdot A := \{\gamma a :\; a \in A\} = \{\gamma\} \cdot A$$

Dimostrare che

a) se A è limitato superiormente (risp. inferiormente) allora $-A$ è limitato inferiormente (risp. superiormente) e vale $\inf(-A) = -\sup A$ (risp. $\sup(-A) = -\inf A$);

b) se A e B sono limitati superiormente allora $A + B$ è limitato superiormente e vale

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Analogamente se sono inferiormente limitati;

c) se $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ e sono limitati superiormente, allora anche $A \cdot B$ è limitato superiormente e vale

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$$

In particolare, se $\gamma > 0$ vale $\sup(\gamma \cdot A) = \gamma \sup A$. Cosa si può dire in generale se $A, B \subseteq \mathbb{R}$?

Esercizio 12. Data una *successione di numeri reali* $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, dimostrare che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f(k) \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} f(k)$$

avendo definito

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f(k) := \sup \left\{ \inf \left\{ f(k) :\; k \geq n,\; k \in \mathbb{N} \right\} :\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} f(k) := \inf \left\{ \sup \left\{ f(k) :\; k \geq m,\; k \in \mathbb{N} \right\} :\; m \in \mathbb{N} \right\}$$