Università degli Studi di Udine

Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 1

Appello del 6 settembre 2006

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Tempo a disposizione: 2 ore

1 Data l'equazione

$$3^{\frac{x}{x+1}} = 2 - \sqrt{x}$$

dimostrare che ammette un'unica soluzione e determinarne un valore approssimato con un errore non superiore a 1/8 senza far uso del calcolatore.

2 Data la successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \ln(2 + \mathrm{e}^{a_n}) \end{cases}$$

a) verificare, ad esempio per induzione, che $a_n \leq 2$ per ogni $n \geq 1$;

b) verificare, ad esempio per induzione, che (a_n) è monotona strettamente decrescente;

c) studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite di (a_n).

verificare che a_n è definita per ogni n e studiare l'esistenza e l'eventuale valore del suo limite.

3 Calcolare, qualora esista, il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x \operatorname{sen}\left(\mathrm{e}^{-x}\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln(2x + \mathrm{e}^{3x})}$$

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 6 settembre 2006

1 Posto $f(x) = 3^{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - 2$, il problema equivale a dimostrare l'esistenza di un unico zero di f nell'intervallo $[0, +\infty[$. Utilizziamo il teorema degli zeri per funzioni continue. Si riconosce subito che f è continua in $[0, +\infty[$ e si ha $f(0) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Quindi per il teorema degli zeri, f ammette uno zero in $[0, +\infty[$. Poiché inoltre la funzione esponenziale di base 3 e la funzione $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ sono strettamente crescenti in $[0, +\infty[$, tale è anche la loro composta $x \mapsto 3^{\frac{x}{x+1}}$, e quindi anche la funzione f essendo somma di due funzioni strettamente crescenti. Perciò f è iniettiva e lo zero è unico.

Per il calcolo approssimato dello zero x_0 utilizziamo il metodo di bisezione. Osserviamo anzitutto che $f(0) = -1$ e $f(1) = \sqrt{3} - 1 > 0$ perciò $x_0 \in [0, 1]$. Applicando la bisezione:

$$f(\frac{1}{2}) = 3^{1/3} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 > (2 - \frac{1}{\sqrt{2}})^3 = 11 - \frac{25}{4}\sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{2} > \frac{32}{25}$$

che è vero in quanto, ad esempio, $\frac{32}{25} < \frac{4}{3}$. Quindi $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$. Inoltre

$$f(\frac{1}{4}) = 3^{1/5} - \frac{3}{2} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 < (\frac{3}{2})^5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^5 < 3^4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 32 < 81$$

perciò $x_0 \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$. Prendendo quindi come approssimazione di x_0 il punto medio dell'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ si ottiene che $x_0 \sim 3/8$ con un errore non superiore a $1/8$.

2a Procediamo per induzione. La proprietà vale per $n = 1$, infatti $a_1 = 2$. Per ipotesi induttiva supponiamo ora che $a_n \leq 2$ e verifichiamo che $a_{n+1} \leq 2$. Si ha, ad esempio,

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}\ln(2 + e^{a_n}) \leq \frac{n+1}{2n+1}\ln(2 + e^2) < \frac{n+1}{2n+1}\ln(2e^2) < 3\frac{n+1}{2n+1} \leq 2$$

essendo $\frac{n+1}{2n+1} \leq \frac{2}{3}$ per ogni $n \geq 1$. Per il principio d'induzione $a_n \leq 2$ per ogni $n \geq 1$.

Osserviamo che si ha anche banalmente $a_n > 0$ per ogni n.

2b Procediamo per induzione. Anzitutto per il punto a) si ha $a_2 = \frac{2}{3}\ln(2 + e^2) < 2 = a_1$. Per ipotesi induttiva supponiamo ora che $a_{n+1} < a_n$ e verifichiamo che $a_{n+2} < a_{n+1}$. Poiché la funzione $x \mapsto \ln(2+e^x)$ è strettamente crescente, essendo funzione composta di funzioni strettamente crescenti, si ha

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1}\ln(2 + e^{a_{n+1}}) < \frac{n+2}{2n+3}\ln(2 + e^{a_n}) < \frac{n+1}{2n+1}\ln(2 + e^{a_n}) = a_{n+1}$$

essendo $\frac{n+2}{2n+3} < \frac{n+1}{2n+1}$ per ogni $n \geq 1$. Per il principio d'induzione $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geq 1$, perciò (a_n) è strettamente decrescente.

2c Per il teorema sul limite delle successioni monotone (a_n) ammette limite L, ed essendo $0 < a_n \leq 2$ tale limite deve appartenere all'intervallo $[0, 2]$.

Passando al limite $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1}, si ottiene che il limite L deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{1}{2}\ln(2 + e^L) \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{2L} - e^L - 2 = 0,$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita $z = e^L$, la cui unica soluzione positiva è $\bar{z} = 2$. Perciò dev'essere $e^L = 2$, cioè $L = \ln 2$, e in conclusione $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ln 2$.

3 Ricordando il limite fondamentale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0,$$

si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x}\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 0,$$

quindi il numeratore si presenta nella forma indeterminata $[+\infty \cdot 0]$. Per il limite fondamentale

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x \operatorname{sen}\left(e^{-x}\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln(2x+e^{3x})} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\ln\left(e^{3x}(1+\frac{2x}{e^{3x}})\right)} \frac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\sqrt{x^2+1}\right)}{e^{-x}\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{2x}{e^{3x}}\right)} \frac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\sqrt{x^2+1}\right)}{e^{-x}\sqrt{x^2+1}}\right) = \left[\frac{1}{3+0}\cdot 1\right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$