Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 1

Appello del 13 luglio 2006

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Tempo a disposizione: 2 ore

1 Data l'equazione

$$\sqrt{x}\,\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{2}$$

dimostrare che ammette un'unica soluzione e determinarne un valore approssimato con un errore non superiore a 1/8.

2 Data la successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_1 = \bar{a} \\ a_{n+1} = a_n \log_2\left(\frac{3a_n - 2}{a_n}\right) \end{cases}$$

a) nel caso $\bar{a} = 3$ verificare che a_n è definita per ogni n e studiare l'esistenza e l'eventuale valore del suo limite;

b) studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite nel caso $\bar{a} = -1$;

3 Calcolare, qualora esista, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2 - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}) - 2x}{3\operatorname{arctg} x + \operatorname{sen}(2x - 3x^2) - 7x^2}$$

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 13 luglio 2006

$\boxed{1}$ Poniamo $f(x) = 2\sqrt{x}\,\mathrm{arcsen}\,x - 1$, funzione definita e continua in $[0,1]$. Allora il problema equivale a dimostrare l'esistenza di un unico zero di f nell'intervallo $[0,1]$. Utilizziamo il teorema degli zeri per funzioni continue: essendo $f(0) = -1$, $f(1) = \pi - 1 > 0$, allora f ammette uno zero in $[0,1]$. Poiché inoltre f, a meno di una costante additiva, è prodotto di due funzioni strettamente crescenti e positive in $[0,1]$, f è strettamente crescente, quindi lo zero è unico.

Per il calcolo approssimato dello zero x_0 utilizziamo il metodo di bisezione:

$$f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}}\,\mathrm{arcsen}\,\frac{1}{2} - 1 = \sqrt{2}\frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\pi\sqrt{2}-6}{6} < 0 \quad \text{essendo } \pi\sqrt{2} < 4\frac{3}{2} = 6 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \in]\frac{1}{2}, 1[,$$

$$f(\frac{3}{4}) = 2\sqrt{\frac{3}{4}}\,\mathrm{arcsen}\,\frac{3}{4} - 1 = \sqrt{3}\big(\mathrm{arcsen}\,\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}\big) > 0 \quad \text{essendo } \mathrm{arcsen}\,\frac{3}{4} > \mathrm{arcsen}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

quindi $x_0 \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$. Prendendo quindi come approssimazione di x_0 il punto medio dell'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ si ottiene che $x_0 \sim 5/8$ con un errore non superiore a $1/8$.

$\boxed{\textbf{2a}}$ Osserviamo che a_{n+1} è ben definito quando $\frac{3a_n-2}{a_n} > 0$ cioè quando $a_n < 0$ oppure $a_n > 2/3$. Procediamo per induzione, dimostrando che $a_n \geq 3$ ed è ben definito per ogni n. Anzitutto $a_1 = 3$. Inoltre, per definizione, se a_n è definito e maggiore di 3, anche a_{n+1} è definito, ed essendo $\frac{3a_n-2}{a_n} > 2$ per $a_n \geq 3$ si ha anche $a_{n+1} \geq a_n \geq 3$. Quindi per il principio di induzione a_n è definita per ogni n ed abbiamo anche contemporaneamente dimostrato che è monotona crescente.

Per il teorema sul limite delle successioni monotone, (a_n) ammette limite L, ed essendo $a_n \geq 3$ per ogni n, dovrà anche essere $L \geq 3$.

Se L fosse finito, passando al limite $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1}, si otterrebbe l'equazione

$$L = L\,\log_2 \frac{3L-2}{L}$$

e, non potendo essere $L = 0$, dovrebbe necessariamente essere $\frac{3L-2}{L} = 2$ ovvero $L = 2$ che è impossibile. Dunque il limite deve essere infinito, e in conclusione $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

$\boxed{\textbf{2b}}$ Allo stesso modo del punto a) si può dimostrare che a_n è definita e negativa per ogni n. Dimostriamo che la successione è decrescente. Si ha

$$a_{n+1} - a_n = a_n\big(\log_2\big(\frac{3a_n-2}{a_n}\big) - 1\big) = a_n \log_2\big(\frac{3a_n-2}{2a_n}\big) < 0$$

poiché a_n è negativa e quindi $\ln(\frac{3a_n-2}{a_n}) > 0$. Analogamente al punto a), il limite esiste e non può essere finito. Dunque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

$\boxed{3}$ Il limite assegnato si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Ricordando i limiti

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}\,z}{z} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}\,z}{z} = 1, \qquad \lim_{z\to0}\frac{\ln(1+z)}{z} = 1, \qquad \lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z} = 1,$$

e dividendo numeratore e denominatore per x, si ottiene

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2-e^{\mathrm{sen}\,x}) - 2x}{3\,\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{sen}(2x-3x^2) - 7x^2} = \lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{\ln(1+(1-e^{\mathrm{sen}\,x}))}{1-e^{\mathrm{sen}\,x}}\,\dfrac{e^{\mathrm{sen}\,x}-1}{\mathrm{sen}\,x}\,\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x} - 2}{3\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x} + \dfrac{\mathrm{sen}(2x-3x^2)}{2x-3x^2}(2-3x) - 7x}$$

$$= \left[\frac{-1\cdot1\cdot1-2}{3\cdot1+1\cdot2-0}\right] = -\frac{3}{5}.$$