Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 1

Appello del 20 marzo 2006

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Tempo a disposizione: 2 ore

1 Data l'equazione

$$2x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - x^2 - 1 = 0$$

a) dimostrare che ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[0,1]$ e determinarne un valore approssimato con un errore non superiore a $1/8$ senza far uso del calcolatore (le seguenti disuguaglianze potrebbero tornare utili: $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $\mathrm{e}^y \geq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x(y-x)$ per ogni $y \geq x \geq 0$);

b) cosa si può dire dell'esistenza e del numero delle soluzioni nell'intervallo $[0,+\infty[$? (per questo punto è possibile utilizzare il calcolo differenziale);

c) (Facoltativo) Dimostrare, ad esempio utilizzando la definizione del numero e, la disuguaglianza $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ per ogni $x \geq 0$. Dedurre da quest'ultima la disuguaglianza $\mathrm{e}^y \geq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x(y-x)$ per ogni $y \geq x \geq 0$. Dimostrare poi la disuguaglianza (più generale)

$$\mathrm{e}^y \geq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x(y-x) + \mathrm{e}^x\frac{(y-x)^2}{2} \quad \text{per ogni } y \geq x \geq 0,$$

ed utilizzarla per risolvere il punto b) senza utilizzare il calcolo differenziale.

2 Data la successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n \mathrm{e}^{\frac{1-a_n}{2a_n}} \end{cases}$$

verificare che a_n è definita per ogni n e studiare l'esistenza e l'eventuale valore del suo limite.

3 Calcolare, qualora esista, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen} x)^x - x^{\operatorname{sen} x}}{x \ln x}$$

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 20 marzo 2006

1a Posto $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - x^2 - 1$, il problema equivale a dimostrare l'esistenza di un unico zero di f nell'intervallo $[0,1]$. Utilizziamo il teorema degli zeri per funzioni continue. Si riconosce subito che f è continua in $[0,1]$ e vale $f(0) = -1$, $f(1) = 2\mathrm{e} - 2 > 0$. Quindi per il teorema degli zeri, f ammette uno zero in $[0,1]$. Se dimostriamo ora che f è strettamente crescente nell'intervallo, seguirà l'iniettività di f è l'unicità dello zero.

Osserviamo che si può scrivere $f(x) = x(2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - x) + 1$. Essendo $g(x) = x$ strettamente crescente e positiva per $x \geq 0$, basta dimostrare che la funzione $h(x) = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - x$ è strettamente crescente e positiva in $[0,1]$.

Utilizzando la prima disuguaglianza suggerita, e ricordando che $\sqrt{x} \geq x$ per $x \in [0,1]$, si osserva che $h(x) \geq 2 + 2\sqrt{x} - x > 0$ per ogni $x \in [0,1]$. Dunque h è positiva. Verifichiamo che h è strettamente crescente. Per $1 \geq y > x \geq 0$, utilizzando la seconda disuguaglianza, si ha

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= 2\mathrm{e}^{\sqrt{y}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + x - y \geq 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + x - y \\ &= (\sqrt{y} - \sqrt{x})\big(2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - (\sqrt{y} + \sqrt{x})\big) \geq (\sqrt{y} - \sqrt{x})\big(2 - (\sqrt{y} + \sqrt{x})\big) > 0, \end{aligned}$$

per ogni $1 \geq y > x \geq 0$. In conclusione si ha che $h(y) > h(x)$ ed h è strettamente crescente. Osserviamo che il medesimo procedimento poteva essere portato avanti direttamente per f senza introdurre h. Infatti, con semplici calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= 2y\mathrm{e}^{\sqrt{y}} - 2x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + x^2 - y^2 \geq 2y\big(\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{y} - \sqrt{x})\big) - 2x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + x^2 - y^2 \\ &\geq (y - x)\big(2 - (y + x)\big) + 2y\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) > 0, \end{aligned}$$

per ogni $1 \geq y > x \geq 0$.

Per il calcolo approssimato dello zero x_0 utilizziamo il metodo di bisezione:

$$f(\tfrac{1}{2}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{5}{4} > 0 \quad \text{essendo } \big(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\big)^2 = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} > \mathrm{e} > \frac{25}{16} = \big(\frac{5}{4}\big)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \in]0, \frac{1}{2}[,$$

$$f(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2} - \frac{17}{16} < 0 \quad \text{essendo } \big(\mathrm{e}^{1/2}\big)^2 = \mathrm{e} < \frac{289}{64} = \big(\frac{17}{8}\big)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[.$$

Prendendo quindi come approssimazione di x_0 il punto medio dell'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ si ottiene che $x_0 \sim 3/8$ con un errore non superiore a $1/8$.

1b Operando come prima si vede che f ammette uno zero in $[0, +\infty[$. L'analisi precedente non è però sufficiente per dimostrare la monotonia di h in $[0, +\infty[$, quindi l'unicità dello zero. Come suggerito, calcoliamo la derivata prima di h:

$$h'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} > 0$$

grazie alla prima disuguaglianza suggerita. Quindi h ed f sono strettamente crescenti e lo zero di f è unico.

1c Ricordiamo che per definizione

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \mathrm{e} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

perciò, per ogni fissato $x > 0$, per la continuità della funzione potenza si ha

$$\mathrm{e}^x = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{y\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{y}\right)^y$$

dove si è posto $y = nx$. In particolare

$$\mathrm{e}^x = \lim_{m\to+\infty}\Big(1+\frac{x}{m}\Big)^m$$

con $m \in \mathbb{N}$, e poiché la successione $a_m = \big(1+\frac{x}{m}\big)^m$ è crescente (si prova in modo analogo al caso $x = 1$), si ha

$$\mathrm{e}^x \geq \Big(1+\frac{x}{m}\Big)^m \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Grazie alla formula del binomio di Newton si ha

$$\mathrm{e}^x \geq \Big(1+\frac{x}{m}\Big)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\Big(\frac{x}{m}\Big)^k \geq 1 + m\frac{x}{m} = 1 + x, \tag{3}$$

che dimostra la prima disuguaglianza (che poteva essere dedotta direttamente da (2) mediante la disuguaglianza di Bernoulli: $(1+z)^n \geq 1+nz$ per $z \geq -1$). Se poi $y \geq x \geq 0$ scrivendo la disuguaglianza per $y - x \geq 0$ al posto di x si ottiene

$$\mathrm{e}^{y-x} \geq 1 + (y-x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^y \geq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x(y-x).$$

Osserviamo che questa è la disuguaglianza di convessità della funzione e^x, dimostrata quindi senza l'ausilio del calcolo differenziale. Sempre da (3), si ottiene che

$$\mathrm{e}^x \geq 1 + m\frac{x}{m} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{x^2}{m^2} = 1 + x + \frac{m-1}{2m}x^2 \text{ per ogni } m \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

ottenuta passando al limite per $m \to +\infty$. Scrivendo $y - x \geq 0$ al posto di x si ottiene

$$\mathrm{e}^{y-x} \geq 1 + (y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^y \geq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x(y-x) + \frac{\mathrm{e}^x}{2}(y-x)^2.$$

Osserviamo che queste disuguaglianze si possono ottenere più facilmente utilizzando il calcolo differenziale e lo sviluppo di Taylor di e^x.

Utilizziamo quest'ultima disuguaglianza per rispondere al quesito c), dimostrando che la funzione $h(x)$ è crescente e positiva su tutto $[0, +\infty[$. Se $x \geq 0$

$$2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - x \geq 2\Big(1 + \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2}\Big) - x = 2 + 2\sqrt{x} > 0.$$

Inoltre, se $y > x \geq 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &\geq 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\Big(\sqrt{y} - \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2}{2}\Big) + x - y \\ &\geq (1+\sqrt{x})\big(2(\sqrt{y}-\sqrt{x}) + (\sqrt{y}-\sqrt{x})^2\big) + x - y = (\sqrt{y}-\sqrt{x})\big(2 + \sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})\big) > 0, \end{aligned}$$

per ogni $y > x \geq 0$. Quindi h è strettamente crescente e x_0 è unico.

Un modo alternativo per dimostrare la prima disuguaglianza era di avvalersi direttamente della seconda disuguaglianza in (1) e la disuguaglianza di Bernoulli, senza passare al limite per ottenere (2). Infatti, dati $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha

$$\mathrm{e} \geq \Big(1+\frac{1}{q}\Big)^q \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{1/q} \geq 1 + \frac{1}{q}.$$

Allora

$$\mathrm{e}^{p/q} = (\mathrm{e}^{1/q})^p \geq \Big(1+\frac{1}{q}\Big)^p \geq 1 + \frac{p}{q}.$$

La disuguaglianza è quindi verificata per ogni $x = p/q \in \mathbb{Q}$ positivo, e dunque, grazie alla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ per ogni $x \geq 0$.

2a Procediamo per induzione. Per definizione, se a_n è definito e diverso da zero, anche a_{n+1} è definito e non nullo. Poiché anche $a_1 \neq 0$, per induzioni si ha che (a_n) è definita e non nulla per ogni n. Allo stesso modo si può dimostrare che $a_n > 0$ per ogni n.

Verifichiamo che la successione è monotona decrescente. Si ha che

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\frac{1-a_n}{2a_n}} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1-a_n}{2a_n} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n < 0 \text{ oppure } a_n \geq 1.$$

Essendo $a_1 > 1$, la monotonia di (a_n) sarà verificata se dimostriamo che $a_n > 1$ per ogni n. In effetti, utilizzando la prima disuguaglianza dell'esercizio 1a), se $a_n > 1$ allora

$$a_{n+1} = a_n \mathrm{e}^{\frac{1-a_n}{2a_n}} \geq a_n\big(1 + \frac{1-a_n}{2a_n}\big) = \frac{1+a_n}{2} > 1$$

perciò, per induzione, $a_n > 1$ per ogni n, quindi la successione è monotona strettamente decrescente.

Per il teorema sul limite delle successioni monotone, (a_n) ammette limite L, ed essendo $1 < a_n \leq 2$ tale limite deve essere contenuto in $[1, 2]$.

Passando al limite $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1}, si ottiene che L deve soddisfare l'equazione

$$L = L\,\mathrm{e}^{\frac{1-L}{2L}}$$

e, non potendo essere $L = 0$, deve necessariamente essere $L = 1$. In conclusione $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

3 Ricordando i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} = 1,$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x\, \ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot x \ln x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x \ln \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x + x \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1,$$

perciò il limite assegnato si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Dall'analisi appena vista si osserva anche che

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x\, \ln x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} (x \ln \operatorname{sen} x) = 0.$$

Si può scrivere

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen} x)^x - x^{\operatorname{sen} x}}{x \ln x} &= \lim_{x\to 0^+} \Big(\frac{\mathrm{e}^{x\ln \operatorname{sen} x} - 1}{x \ln x} - \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x \ln x} - 1}{x \ln x}\Big) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \Big(\frac{\mathrm{e}^{x\ln \operatorname{sen} x} - 1}{x \ln \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln x} - \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x \ln x} - 1}{\operatorname{sen} x \ln x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\mathrm{e}^{x\ln \operatorname{sen} x} - 1}{x \ln \operatorname{sen} x} \cdot \Big(1 + \frac{\ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\ln x}\Big) - \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x \ln x} - 1}{\operatorname{sen} x \ln x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \\
&= [1 \cdot (1 + 0) - 1 \cdot 1] = 0.
\end{aligned}$$