Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 1

Appello del 11 gennaio 2006

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione

$$x^{\varepsilon} = \frac{2}{3x+1}$$

a) dimostrare che per ogni fissato $\varepsilon \geq 0$ ammette un'unica soluzione $x(\varepsilon)$ nell'intervallo $[0,1]$;

b) dimostrare che per $\varepsilon = 1/3$ l'equazione ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[0,1]$ e determinarne un valore approssimato con un errore non superiore a $1/8$ senza far uso del calcolatore;

c) (*) dimostrare che la funzione $\varepsilon \mapsto x(\varepsilon)$ è monotona strettamente decrescente in $]0,+\infty[$;

d) (*) calcolare, qualora esista, il limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} x(\varepsilon)$. La funzione $\varepsilon \mapsto x(\varepsilon)$ è continua in $\varepsilon_0 = 0$?

2 Data la successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{n+1}{5n+2}\sqrt{1+9a_n^2} \end{cases}$$

a) verificare, ad esempio per induzione, che $a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$;

b) verificare, ad esempio per induzione, che (a_n) è monotona strettamente decrescente;

c) studiare l'esistenza e l'eventuale valore del limite di (a_n).

3 Calcolare, qualora esista, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1-2x) + 2x\ln(1+x)}{2\,\mathrm{tg}\, x - \mathrm{sen}(2x)}$$

4 Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che sia Lipschitziana con costante di Lipschitz L sui razionali di $]a,b[$, cioè esiste $L > 0$ tale che per ogni $p, q \in]a,b[\cap \mathbb{Q}$ si abbia

$$|f(p) - f(q)| \leq L|p-q|$$

Dimostrare che f è Lipschitziana con costante di Lipschitz L in $]a,b[$.

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 11 gennaio 2006

1a Il caso $\varepsilon = 0$ è banale e si calcola $x(0) = 1/3$. Per $\varepsilon > 0$ si ha

$$x^\varepsilon = \frac{2}{3x+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^\varepsilon(3x+1) - 2 = 0$$

quindi il problema equivale a dimostrare che la funzione continua $f_\varepsilon(x) = x^\varepsilon(3x+1)-2$ ammette un unico zero nell'intervallo $[0,1]$. Essendo $f_\varepsilon(0) = -2$ e $f_\varepsilon(1) = 2$ per il teorema degli zeri per funzioni continue, esiste uno zero $x(\varepsilon)$ di f_ε. Poiché, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, la funzione f_ε è strettamente crescente, essendo prodotto di funzioni strettamente crescenti e positive in $[0,1]$ (addizionate alla costante -2), allora tale zero è unico.

1b L'esistenza e l'unicità seguono dal punto a). Per il calcolo approssimato di $x(1/3)$ utilizziamo il metodo di bisezione. Per facilità di notazione chiamiamo $g(x) = f_{1/3}(x) = x^{1/3}(3x+1)-2$. Calcoliamo g nel punto medio di $[0,1]$:

$$g(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{1/3} \cdot \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2^{4/3}}(5 - 2^{7/3}) < 0 \quad \text{essendo } 5^3 < 2^7 \qquad \Longrightarrow \qquad x(1/3) \in [\frac{1}{2}, 1]$$

$$g(\frac{3}{4}) = (\frac{3}{4})^{1/3} \cdot \frac{13}{4} - 2 > \frac{3}{4} \cdot \frac{13}{4} - 2 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(1/3) \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$$

Prendendo quindi come approssimazione di $x(1/3)$ il punto medio dell'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ si ottiene che $x(1/3) \sim 5/8$ con un errore non superiore a $1/8$.

1c Dal punto a) sappiamo che

$$f_\varepsilon(x(\varepsilon)) = 0 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

Si osserva che per ogni fissato $x \in]0,1[$ la funzione

$$\begin{aligned}]0,+\infty[\quad &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ \varepsilon \quad &\mapsto \quad f_\varepsilon(x) = x^\varepsilon(3x+1) - 2 \end{aligned}$$

è strettamente decrescente. Poiché $x(\varepsilon) \in]0,1[$ per ogni $\varepsilon > 0$, allora se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ si ha

$$f_{\varepsilon_1}(x(\varepsilon_1)) > f_{\varepsilon_2}(x(\varepsilon_1))$$

ma anche $f_{\varepsilon_1}(x(\varepsilon_1)) = f_{\varepsilon_2}(x(\varepsilon_2)) = 0$ perciò

$$f_{\varepsilon_2}(x(\varepsilon_2)) > f_{\varepsilon_2}(x(\varepsilon_1)).$$

Poiché l'applicazione $x \to f_{\varepsilon_2}(x)$ è strettamente crescente si ha quindi $x(\varepsilon_2) > x(\varepsilon_1)$ cioè $x(\varepsilon)$ è monotona strettamente crescente.

1d Per il punto c) la funzione $x(\varepsilon)$ è monotona, quindi esiste il $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon) = L$. Poiché $x(\varepsilon) \in]0,1[$ per ogni ε e la funzione è crescente, si ha $L \in [0,1[$. Essendo

$$x^\varepsilon(\varepsilon) = \frac{2}{3x(\varepsilon)+1} \tag{1}$$

per ogni $\varepsilon > 0$, vorremmo passare al limite in questa relazione. L'unico problema potrebbe essere che $L = 0$ nel qual caso passando al limite il membro sinistro si presenterebbe nella forma indeterminata 0^0. Basta dimostrare che L non può essere 0. Poiché $x(\varepsilon) < 1$, dalla (1) si ottiene

$$1 > x^\varepsilon(\varepsilon) = \frac{2}{3x(\varepsilon)+1} \qquad \Longrightarrow \qquad x(\varepsilon) > \frac{1}{3}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi per confronto $L \geq 1/3$ e passando al limite $\varepsilon \to 0^+$ in (1), si ottiene

$$L^0 = \frac{2}{3L+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3L + 1 = 2$$

quindi $L = 1/3$ ed essendo anche $x(0) = 1/3$ si ha $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon) = x(0)$ cioè $x(\varepsilon)$ è continua in 0.

2a Procediamo per induzione. Essendo $a_1 = 1$ la proprietà vale per $n = 1$. Per ipotesi induttiva supponiamo ora che $a_n \le 1$ e verifichiamo che $a_{n+1} \le 1$. Si ha

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{5n+2}\sqrt{1+9a_n^2} \le \frac{n+1}{5n+2}\sqrt{10} \le \frac{2\sqrt{10}}{7} < 1$$

essendo $\frac{n+1}{5n+2} \le \frac{2}{7}$ per ogni $n \ge 1$. Per il principio d'induzione $a_n \le 1$ per ogni $n \ge 1$.

2b Procediamo per induzione. Per il punto a) si ha innanzitutto $a_2 = \frac{2\sqrt{10}}{7} < 1 = a_1$. Per ipotesi induttiva supponiamo ora che $a_{n+1} < a_n$ e verifichiamo che $a_{n+2} < a_{n+1}$. Si ha

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)+1}{5(n+1)+2}\sqrt{1+9a_{n+1}^2} < \frac{n+2}{5n+7}\sqrt{1+9a_n^2} < \frac{n+1}{5n+2}\sqrt{1+9a_n^2} = a_{n+1}$$

essendo $\frac{n+2}{5n+7} \le \frac{n+1}{5n+2}$ per ogni $n \ge 1$. Per il principio d'induzione $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \ge 1$, dunque (a_n) è strettamente decrescente.

2c Per il teorema sul limite delle successioni monotone (a_n) ammette limite L, ed essendo $0 < a_n \le 1$ tale limite deve essere contenuto in $[0,1]$.

Passando al limite $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1}, si ottiene che il limite L deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{1}{5}\sqrt{1+9L^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} L \ge 0 \\ 25L^2 = 1 + 9L^2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad L = \frac{1}{4}.$$

In conclusione $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1/4$.

3 il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Ricordando i limiti notevoli

$$\lim_{z\to0}\frac{\ln(1+z)}{z} = 1, \qquad \lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1,$$

si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1-2x)+2x\ln(1+x)}{2\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x\to0}\frac{x\left[\ln(1-2x)+\ln(1+x)^2\right]}{2\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-2\operatorname{sen}x\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{x\left[\ln\left((1-2x)(1+x)^2\right)\right]}{2\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}(1-\cos^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x\left[\ln(1-3x^2-2x^3)\right]}{2\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3x^2-2x^3)}{-3x^2-2x^3}\cdot\frac{-3x^2-2x^3}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\operatorname{sen}x}\right)^3 = -\frac{3}{2}.$$

4 Siano $x, y \in \mathbb{R}$ fissati. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e per la continuità di f si ha

$$\lim_{\substack{p\to x\\ p\in\mathbb{Q}}} f(p) = f(x), \qquad \lim_{\substack{q\to y\\ q\in\mathbb{Q}}} f(q) = f(y).$$

Passando al limite $p \to x$ si ottiene

$$\lim_{\substack{p\to x\\ p\in\mathbb{Q}}} |f(p)-f(q)| \le \lim_{\substack{p\to x\\ p\in\mathbb{Q}}} L|p-q| \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(q)| \le L|x-q|$$

che è valida per tutti i $q \in \mathbb{Q}\,\cap\,]a,b[$, e passando al limite $q \to y$ in quest'ultima relazione si ottiene

$$\lim_{\substack{q\to y\\ q\in\mathbb{Q}}} |f(x)-f(q)| \le \lim_{\substack{q\to y\\ q\in\mathbb{Q}}} L|x-q| \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)| \le L|x-y|.$$

Poiché x, y erano arbitrari, la funzione f è lipschitziana di costante L in $]a,b[$.

Non volendo utilizzare il doppio limite si poteva anche procedere nel modo seguente: sempre per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ si ha che per ogni $x \in]a,b[$ esiste una successione (p_n) di numeri razionali di $]a,b[$ tale che $p_n \to x$. Infatti, per la densità di $\mathbb{Q}$, per ogni n esiste un razionale p_n che appartiene all'intorno di centro x e raggio $1/n$. Si ha dunque $|p_n - x| < 1/n$ e passando al limite si ottiene $\lim_{n\to+\infty} p_n = x$.

Siano dunque (p_n) e (q_n) due successioni di numeri razionali di $]a,b[$ convergenti, rispettivamente, a x e a y. Per ipotesi

$$|f(p_n) - f(q_n)| \leq L|p_n - q_n| \tag{2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per la continuità di f si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(p_n) = f(x), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(q_n) = f(y),$$

e passando al limite $n \to +\infty$ in (2) si ottiene

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Poiché x, y erano arbitrari, la funzione f è lipschitziana di costante L in $]a,b[$.