Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 1

Appello del 7 dicembre 2005

N.B.: scrivere nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio consegnato. Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Tempo a disposizione: 3 ore

1 Data l'equazione

$$\frac{x^3}{2-x} = \alpha$$

a) dimostrare che per $\alpha = 1/2$ ammette un'unica soluzione $\bar{x}$ in $]-\infty, 2[$ e determinarne un valore approssimato con un errore non superiore a $1/8$;

b) dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione ammette un unica soluzione $x(\alpha)$ in $]-\infty, 2[$;

c) calcolare, qualora esista, il $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} x(\alpha)$;

d) dimostrare che per $\alpha > 0$ l'equazione ammette un'unica soluzione in $\mathbb{R}$, mentre esiste $\bar{\alpha} < 0$ tale che per $\alpha \leq \bar{\alpha}$ l'equazione ammette più di una soluzione.

2 Data la successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_0 = \bar{a} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^3}{2 - a_n}, \end{cases}$$

a) verificare nel caso $\bar{a} = -1$, ad esempio per induzione, che a_n è ben definita e $-2 \leq a_n \leq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

b) studiare, sempre nel caso $\bar{a} = -1$, l'esistenza e l'eventuale valore del limite di (a_n);

c) discutere l'esistenza e l'eventuale valore del limite di (a_n) al variare di $\bar{a} \in]-\infty, 1]$;

d) (*) discutere l'esistenza e l'eventuale valore del limite di (a_n) al variare di $\bar{a} \in]1, +\infty]$.

3 Calcolare, qualora esista, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{\sqrt{3 + \mathrm{e}^x} - \sqrt{5 - \mathrm{e}^x}}$$

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 7 dicembre 2005

1a Si ha che

$$\frac{x^3}{2-x} = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^3 + x - 2 = 0$$

quindi il problema equivale a dimostrare che la funzione continua $z(x) = 2x^3 + x - 2$ ammette un unico zero nell'intervallo $]-\infty, 2[$. Essendo

$$\lim_{x\to-\infty} z(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} z(x) = 16 > 0,$$

per il teorema degli zeri per funzioni continue, esiste uno zero $\bar{x}$ di z (quindi un unica soluzione della nostra equazione) in $]-\infty, 2[$. Poiché inoltre z è strettamente crescente, essendo somma di funzioni strettamente crescenti, allora z è iniettiva e tale zero è unico.

Per il calcolo approssimato di $\bar{x}$ utilizziamo il metodo di bisezione. Si osserva che $z(0) = -2$ e $z(1) = 1$. Quindi lo zero di z appartiene all'intervalllo $[0, 1]$. Calcoliamo z nel punto medio di $[0, 1]$:

$$z(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{x} \in [\frac{1}{2}, 1]$$

$$z(\frac{3}{4}) = \frac{27}{32} + \frac{3}{4} - 2 = \frac{13}{32} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{x} \in [\frac{3}{4}, 1]$$

Prendendo quindi come approssimazione di $\bar{x}$ il punto medio dell'intervallo $[\frac{3}{4}, 1]$ si ottiene che $\bar{x} \sim 7/8$ con un errore non superiore a $1/8$.

1b Dimostriamo innanzitutto che la funzione continua

$$f :]-\infty, 2[\to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{x^3}{2-x}$$

è strettamente crescente in $]-\infty, 2[$. Distinguiamo vari casi. Si osserva che la funzione $g(x) = 2-x$ è strettamente decrescente e positiva in $]-\infty, 2[$ quindi la funzione $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{2-x}$ è strettamente crescente in tale intervallo. Poiché $x^3 \geq 0$ per $x \geq 0$, allora f è strettamente crescente in $[0, 2[$ essendo prodotto di funzioni strettamente crescenti e positive.

Se, invece, $x < 0 \leq y$ allora banalmente $f(x) < 0 \leq f(y)$.

Infine, consideriamo il caso in cui x, y siano entrambi negativi. Vogliamo dimostrare che

$$x < y < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) < f(y).$$

Essendo $y - x > 0$, quest'ultima disequazione equivale a

$$x^3(2-y) < y^3(2-x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad xy(y^2-x^2) < 2(y^3-x^3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad xy(y+x) < 2(x^2+xy+y^2)$$

che è verificata in quanto il primo membro è negativo mentre il secondo è positivo. Dunque f è strettamente crescente in $]-\infty, 2[$.

Poiché f è continua in $]-\infty, 2[$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty,$$

per il teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori compresi tra il suo estremo inferiore e superiore, cioè tra $-\infty$ e $+\infty$. Dall'iniettività segue poi che ogni valore viene assunto un'unica volta, da cui la tesi.

1c Poiché f è biiettiva, dunque invertibile

$$f\big(x(\alpha)\big) = \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(\alpha) = f^{-1}(\alpha)$$

dunque la funzione $\alpha \mapsto x(\alpha)$ non è altro che la funzione inversa di f. Si ha che $f^{-1} : \mathbb{R} \to]-\infty, 2[$ è strettamente crescente (essendo inversa di f che è strettamente crescente) e per il teorema sul limite delle funzioni monotone

$$\lim_{\alpha\to+\infty} x(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} f^{-1}(\alpha) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} f^{-1}(\alpha) = 2.$$

Alternativamente si poteva operare il cambio di variabile $\alpha = f(x)$ ottenendo

$$\lim_{\alpha\to+\infty} x(\alpha) = \lim_{x\to2} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x\to2} x = 2.$$

1d Se $\alpha > 0$ abbiamo già visto dal punto b) che l'equazione ha un'unica soluzione in $]-\infty, 2[$. D'altro canto se $x > 2$ si ha $\frac{x^3}{2-x} < 0$, quindi l'equazione $\frac{x^3}{2-x} = \alpha$ non ha soluzioni per $x > 2$, e in conclusione ha un'unica soluzione in $\mathbb{R}$.

Sia ora $\alpha < 0$. Si osserva che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$ quindi ci si aspetta che l'equazione $f(x) = \alpha$ abbia almeno due soluzioni per gli α minori di zero. Più precisamente, dalla continuità di f e da detti limiti, segue che f ha massimo in $]2, +\infty[$ che verrà indicato con M. Per il teorema dei valori intermedi f assume in $]2, +\infty[$ tutti i valori compresi tra $-\infty$ ed M, in particolare tutti i valori $y \leq \bar{y} = \min\{0, M\}$ (si può poi dimostrare che $M = -6 = f(3)$). Per il punto b), f assume tutti i valori reali anche se ristretta all'intervallo $]-\infty, 2[$, quindi i valori $\alpha \leq \bar{\alpha}$ vengono assunti almeno due volte (in realtà 3).

2a Procediamo per induzione. $a_0 = -1$ è banalmente compreso tra -2 e 0. Supponiamo ora che a_n sia definito e $-2 \leq a_n \leq 0$. Quindi $2 - a_n \geq 2$ e a_{n+1} è ben definito. Si ha inoltre

$$a_{n+1} + 2 = \frac{a_n^3}{2 - a_n} + 2 = \frac{a_n^3 - 2a_n + 4}{2 - a_n} = \frac{(a_n + 2)(a_n^2 - 2a_n + 2)}{2 - a_n}.$$

Per ipotesi induttiva $a_n + 2 > 0$ e $2 - a_n \geq 2$, mentre $a_n^2 - 2a_n + 2 > 0$ sempre. Quindi $a_{n+1} + 2 \geq 0$ cioè $a_{n+1} \geq -2$. Per il principio d'induzione $-2 \leq a_n \leq 0$ per ogni n.

2b Per il punto a) si ha

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^3}{2 - a_n} - a_n = \frac{a_n(a_n^2 + a_n - 2)}{2 - a_n} \geq 0$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque (a_n) è una successione crescente. Per il teorema sul limite delle successioni monotone (a_n) ammette limite L, ed essendo una successione limitata, tale limite deve essere finito e, per l'analisi del punto a), contenuto in $[-2, 0]$.

Passando al limite $n \to +\infty$ nella definizione di a_{n+1}, si ottiene che il limite L deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{L^3}{2 - L} \qquad \Longleftrightarrow \qquad L(L^2 + L - 2) = 0$$

perciò $L = 0$ oppure $L = 1$ oppure $L = -2$. Poiché $L \in [-2, 0]$ e la successione è crescente allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = L = 0$.

2c Si può osservare (e lo si poteva fare già anche per i punti a)-b)) che $a_{n+1} = f(a_n)$ dove f è la funzione introdotta nell'esercizio 1. Essendo $f(-2) = -2$, se $\bar{a} = -2$ allora $a_1 = -2$ e per induzione $a_n = -2$ per ogni n e la successione converge banalmente a -2. Essendo poi $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, un fatto analogo accade quando $\bar{a} = 0$ oppure $\bar{a} = 1$.

Poiché f è strettamente crescente in $]-\infty, 2[$ si ha che

$$\begin{array}{lll} a_n < -2 & \Longrightarrow f(a_n) < f(-2) & \text{cioè } a_{n+1} < -2, \\ -2 < a_n < 0 & \Longrightarrow f(-2) < f(a_n) < f(0) & \text{cioè } -2 < a_{n+1} < 0, \\ 0 < a_n < 1 & \Longrightarrow f(0) < f(a_n) < f(1) & \text{cioè } 0 < a_{n+1} < 1. \end{array} \tag{1}$$

Inoltre, per quanto calcolato precedentemente,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n(a_n-1)(a_n+2)}{2-a_n} \begin{cases} < 0 & \text{se } a_n < -2, \\ > 0 & \text{se } -2 < a_n < 0,\ a_n \neq 0, \\ < 0 & \text{se } 0 < a_n < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Utilizzando (1) e (2), per induzione si può dunque provare che

$$\begin{array}{lll} \bar{a} < -2 & \overset{(1)}{\Longrightarrow} a_n < -2\ \forall n & \overset{(2)}{\Longrightarrow} (a_n) \text{ è decrescente}, \\ -2 < \bar{a} < 0 & \overset{(1)}{\Longrightarrow} -2 < a_n < 0\ \forall n & \overset{(2)}{\Longrightarrow} (a_n) \text{ è crescente}, \\ 0 < \bar{a} < 1 & \overset{(1)}{\Longrightarrow} 0 < a_n < 1\ \forall n & \overset{(2)}{\Longrightarrow} (a_n) \text{ è decrescente}, \end{array}$$

quindi per qualsiasi scelta di $\bar{a}$ la successione (a_n) è ben definita e monotona, dunque ammette limite. Con un'analisi simile a quella del punto b) si ottiene che

$$\begin{array}{ll} \bar{a} < -2 & \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \\ -2 < \bar{a} < 0 & \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \\ 0 < \bar{a} < 1 & \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \end{array}$$

2d Il caso in cui $\bar{a} > 1$ è più complicato, ad esempio perché (a_n) può non essere definita per ogni n. Per $\bar{a} \in]1, 2[$ potrebbe infatti accadere che $a_n = 2$ per qualche n, dunque successivamente non sarebbe possibile calcolare a_{n+1}. Come individuare tutti gli $\bar{a}$ con tale proprietà? Sono quelli per cui esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}(\bar{a}) = 2.$$

Poiché $f : [1, 2[\to [1, +\infty[$ è invertibile, allora

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}(\bar{a}) = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bar{a} = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n \text{ volte}}(2).$$

Quindi $\bar{a}$ deve essere uno qualsiasi dei valori assunti dalla successione definita per induzione da

$$\begin{cases} b_0 = 2 \\ b_{m+1} = f^{-1}(b_m). \end{cases}$$

Com'è fatto l'insieme dei valori di (b_m)? Poiché $f^{-1} : [1, +\infty[\to [1, 2[$, per induzione si prova che $b_m \in [1, 2[$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Inoltre poiché $b_1 < 2 = b_0$ e f^{-1} è strettamente crescente (essendo inversa di f strettamente crescente), sempre per induzione si prova che (b_m) è monotona strettamente decrescente, quindi ammette limite (finito) ℓ che deve soddisfare l'equazione $\ell = f^{-1}(\ell)$. Siccome

$$\ell = f^{-1}(\ell) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(\ell) = \ell$$

dall'analisi del punto b) segue che $\ell = 0$ oppure $\ell = 1$ oppure $\ell = -2$. Dal momento che $b_m \in [1, 2[$ per ogni m ed è decrescente si ha $\lim_{m\to+\infty} b_m = 1$.

In conclusione esistono infiniti $\bar{a}$ nell'intervallo $]1, 2[$ per cui la relativa successione (a_n) non è definita per tutti gli n. L'insieme di tali $\bar{a}$ si addensa a 1. Più precisamente, da quanto visto e dalla monotonia di f in $]1,2[$, posto $I_m =]b_{m+1}, b_m[$ si può dimostrare che $f(I_m) = I_{m-1}$ per ogni $m \geq 1$ e che $f(I_0) =]2, +\infty[$. Inoltre, essendo $\lim_{m\to+\infty} b_m = 1$, si ha che

$$]1,2[= \bigcup_{m=0}^{\infty} I_m \cup \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

Se dunque $\bar{a} \in]1,2[$, si ha $\bar{a} = b_m$ per qualche m, e quindi la successione (a_n) non è ben definita, oppure $\bar{a} \in I_m$ per qualche m. In quest'ultimo caso, per quanto osservato sopra, si ha allora $a_m \in I_0$ e $a_{m+1} \in]2, +\infty[$. Osserviamo ora che se $x > 2$ allora $f(x) < 0$, quindi, nel nostro caso, $a_{m+2} < 0$ e la successione diventa definitivamente negativa. A questo punto ci si ricollega al punto c), e il limite di a_n sarà dunque 0 se $a_{m+2} \in]-2, 0[$ oppure $-\infty$ se $a_{m+2} < -2$.

Facciamo vedere che, indipendentemente dalla scelta di $\bar{a} \in I_m$, si ha che $a_{m+2} < -2$ e quindi il limite di (a_n) sarà $-\infty$. Basta verificare che se $x > 2$ allora $f(x) < -2$. Infatti, se $x > 2$ si ha

$$f(x) < -2 \iff x^3 > -2(2-x) \iff x^3 - 2x + 4 > 0 \iff (x+2)(x^2 - 2x + 2) > 0$$

che è sempre vero per $x > 2$.

Ricapitolando

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } \bar{a} \in]-\infty, 2[\cup]1, +\infty[\setminus \{b_0, b_1, b_2, \dots\} \\ -2 & \text{se } \bar{a} = -2 \\ 0 & \text{se } \bar{a} \in]-2, 1[\\ 1 & \text{se } \bar{a} = 1 \\ \nexists & \text{se } \bar{a} \in \{b_0, b_1, b_2, \dots\} \end{cases}$$

3 Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Ricordando i limiti notevoli

$$\lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1,$$

si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{\sqrt{3+e^x} - \sqrt{5-e^x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\big(1 + (\cos\sqrt{x} - 1)\big)}{\sqrt{3+e^x} - \sqrt{5-e^x}} \cdot \frac{\sqrt{3+e^x} + \sqrt{5-e^x}}{\sqrt{3+e^x} + \sqrt{5-e^x}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln\big(1 + (\cos\sqrt{x} - 1)\big)}{\cos\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot \big(\sqrt{3+e^x} + \sqrt{5-e^x}\big) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -1. \end{aligned}$$