Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Agraria

Esercitazioni di Matematica

29 novembre 2005

1 Dato l'equazione differenziale

$$y' = \frac{t^2 + 5\,\mathrm{sen}\,t + 2}{3^y}$$

a) dire se la funzione $y(t) = \log_3 t$ è soluzione dell'equazione;

b) determinare la generica soluzione del problema, ad esempio col metodo di separazione delle variabili;

c) tra tutte le soluzioni determinare quella per cui $y(0) = 2$.

2 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4ty + t \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) dire se la funzione $y(t) = -1/4$ è soluzione del problema;

b) determinare la soluzione del problema, qualora non lo sia la funzione di cui al punto a).

3 Data la funzione

$$g(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{1/x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;

c) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$;

e) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

Soluzioni degli esercizi del 29 novembre 2005

$\boxed{\mathbf{1}}$ a) Per $t > 0$ si ha $y'(t) = \frac{\log_3 \mathrm{e}}{t}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$\frac{\log_3 \mathrm{e}}{t} = \frac{t^2 + 5\operatorname{sen} t + 2}{3^{\log_3 t}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\log_3 \mathrm{e}}{t} = \frac{t^2 + 5\operatorname{sen} t + 2}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \log_3 \mathrm{e} = t^2 + 5\operatorname{sen} t + 2$$

che non è identicamente soddisfatta per $t > 0$ (ad esempio, per $t = \pi/2$ si ottiene $\log_3 \mathrm{e} \neq (\pi/2)^2 + 7$). La funzione non è dunque soluzione.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$, utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$3^y\, dy = (t^2 + 5\operatorname{sen} t + 2)\, dt$$

e integrando

$$\int 3^y\, dy = \int (t^2 + 5\operatorname{sen} t + 2)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3^y}{\ln 3} = \frac{t^3}{3} - 5\cos t + 2t + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Risolvendo quest'ultima equazione nell'incognita y si ottiene

$$y = y(t) = \log_3 \big[(\frac{t^3}{3} - 5\cos t + 2t + c) \ln 3 \big]$$

che al variare di $c \in \mathbb{R}$ fornisce tutte le soluzioni dell'equazione.

c) Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si ricava

$$2 = \log_3 \big[(-5 + c) \ln 3 \big] \quad \Longleftrightarrow \quad 3^2 = (-5 + c) \ln 3 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 5 + \frac{9}{\ln 3}.$$

La soluzione è quindi

$$y(t) = \log_3 \big[(\frac{t^3}{3} - 5\cos t + 2t + 5 + \frac{9}{\ln 3}) \ln 3 \big].$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ a) Si ha $y'(t) = 0$ e sostituendo si ottiene

$$0 = 4t \left(-\frac{1}{4} \right) + t$$

che è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$. La funzione è dunque soluzione della prima equazione. Tuttavia $y(0) \neq 2$ perciò non verifica le condizioni iniziali, quindi non è soluzione del problema di Cauchy.

b) Si ricorda che la soluzione generale dell'equazione lineare

$$y' = a(t)y + b(t)$$

con $a(t), b(t)$ funzioni continue, è

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.

Nel nostro caso $a(t) = 4t$ e una sua primitiva è ad esempio $A(t) = 2t^2$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t^2} \int \mathrm{e}^{-2t^2} t\, dt = -\frac{\mathrm{e}^{2t^2}}{4} \int \mathrm{e}^{-2t^2} (-4t)\, dt.$$

Consultando la tabella 2 degli integrali si vede che

$$\int e^{f(t)} f'(t)\, dt = e^{f(t)} + c$$

con c generica costante d'integrazione, perciò

$$y(t) = -\frac{e^{2t^2}}{4}\left(e^{-2t^2} + c\right) = -\frac{1}{4} + \bar{c}\, e^{2t^2}$$

essendo $\bar{c} = -c/4$ un generico numero reale al pari di c.

c) Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si ottiene l'equazione $2 = -1/4 + \bar{c}$ quindi $\bar{c} = 9/4$ e la soluzione è $y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{9}{4}e^{2t^2}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ a) Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione è ivi continua e derivabile.

b) Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = [\pm\infty \cdot 1] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = [2 \cdot +\infty] = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = [2 \cdot 0] = 0.$$

Quindi la funzione non ammette né massimo né minimo assoluto.

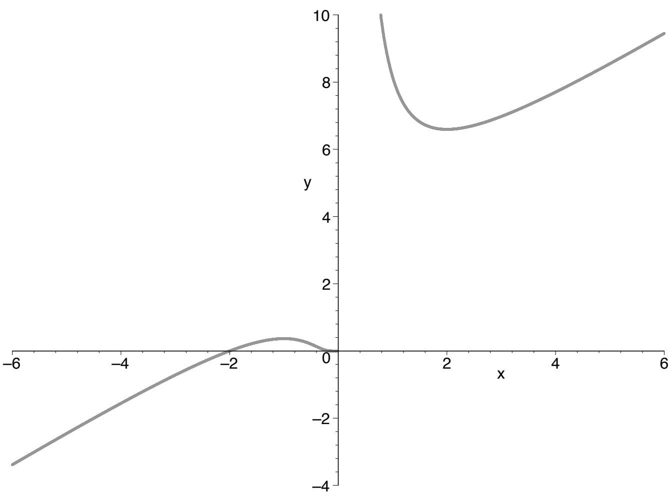
c) La derivata prima è

$$g'(x) = e^{1/x} - \frac{x+2}{x^2}e^{1/x} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}e^{1/x}.$$

Si ha che $g'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - x - 2 \geq 0$ ovvero se $x \geq 2$ oppure $x \leq -1$. Quindi

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[\\ = 0, & \text{se } x = -1 \text{ oppure } x = 2 \\ < 0, & \text{se } x \in]-1, 0[\cup]0, 2[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente su $]-\infty, -1[$ e su $]2, +\infty[$, mentre è decrescente su $]-1, 0[$ e su $]0, 2[$. In $x_0 = -1$ e $x_1 = 2$ ammette un massimo ed un minimo relativo, rispettivamente.



d) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(1) = 3\mathrm{e}$ e $g'(1) = -2\mathrm{e}$, l'equazione della retta cercata è

$$y = -2\mathrm{e}(x-1) + 3\mathrm{e}.$$

f) La derivata seconda è

$$g''(x) = -\frac{x^2 - (x+2)2x}{x^4}\mathrm{e}^{1/x} - \frac{x^2 - x - 2}{x^4}\mathrm{e}^{1/x} = \frac{5x+2}{x^4}\mathrm{e}^{1/x},$$

ottenendo che

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2/5[\\ = 0, & \text{se } x = -2/5 \\ > 0, & \text{se } x \in]-2/5, 0[\cup]0, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione è quindi convessa su $]-2/5, 0[$ e su $]0, +\infty[$, concava su $]-\infty, -2/5[$. In $x = -2/5$ ha un punto di flesso.