Università degli Studi di Udine        Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Agraria

# Esercitazioni di Matematica

22 novembre 2005

$\boxed{\mathbf{1}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2}$$

a) determinare il dominio;

b) studiare il segno di $g$;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;

d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 0$,

f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;

g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di $g$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Per l'equazione differenziale

$$y' = 4t\sqrt{y+1}$$

verificare se le seguenti funzioni sono soluzioni:

**a)** $y_1(t) = -\cos^2 t, \qquad \forall\, t \in [0, \pi/2]$        **b)** $y_2(t) = t^4 + 4t^2 + 3, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Verificare che la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{2t} - 2t^2 + 2t - 3$ è soluzione dell'equazione

$$y'' - y' - 2y = 4t^2$$

## Soluzioni degli esercizi del 22 novembre 2005

$\boxed{1}$ a) Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui $x - 2 \neq 0$, ovvero $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. La funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è $\geq 0$ quando $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ ovvero $x \leq -2$ oppure $x \geq -1$, mentre il denominatore è positivo se e solo se $x > 2$. Si conclude che

$$g(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in ]-2, -1[ \cup ]2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -2 \text{ oppure } x = -1, \\ < 0, & \text{se } x \in ]-\infty, -2[ \cup ]-1, 2[. \end{cases}$$

c) Dal punto b) si ottiene che

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} g(x) = \left[\frac{12}{0^{\pm}}\right] = \pm\infty,$$

mentre (limite all'infinito di funzioni razionali)

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x \cdot \frac{1 + 3/x + 2/x^2}{1 - 2/x}\right) = [\pm\infty \cdot 1] = \pm\infty.$$

Quindi la funzione non ammette minimo nè massimo assoluto.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(2x+3)(x-2) - (x^2 + 3x + 2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 8}{(x-2)^2},$$

quindi $g'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 4x - 8 \geq 0$ ovvero se $x \leq 2 - 2\sqrt{3}$ oppure $x \geq 2 + 2\sqrt{3}$. Quindi

$$g'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in ]-\infty, 2 - 2\sqrt{3}[ \cup ]2 + 2\sqrt{3}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 2 - 2\sqrt{3} \text{ oppure } x = 2 + 2\sqrt{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in ]2 - 2\sqrt{3}, 2[ \cup ]2, 2 + 2\sqrt{3}[. \end{cases}$$

La funzione è dunque crescente su $]-\infty, 2-2\sqrt{3}[$ e su $]2+2\sqrt{3}, +\infty[$, decrescente su $]2-2\sqrt{3}, 2[$ e su $]2, 2+2\sqrt{3}[$. In $x = 2-2\sqrt{3}$ e $x = 2+2\sqrt{3}$ ha, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

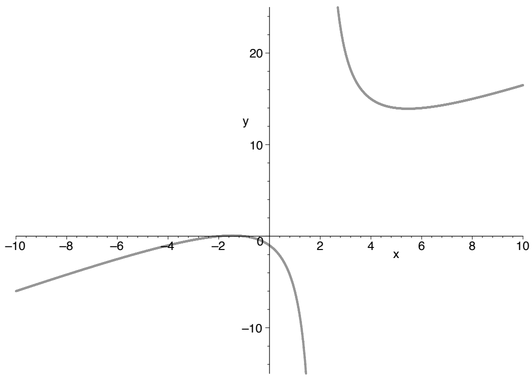
Poiché $g(0) = -1$ e $g'(0) = -2$, l'equazione della retta cercata è

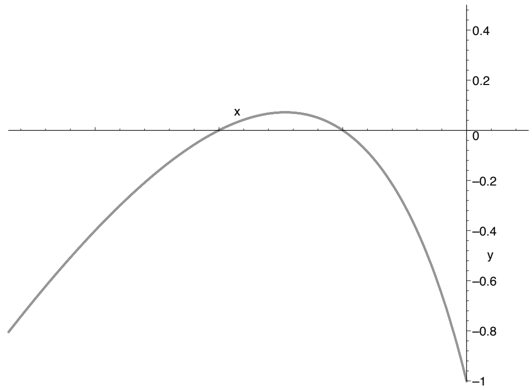
$$y = -2x - 1.$$

f) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x - 8)2(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2 - 4x - 8)}{(x-2)^3} = \frac{24}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il numeratore è sempre positivo, si ha che $g''(x) > 0$ se e solo se $(x-2)^3 > 0$ ovvero se $x > 2$. La funzione è dunque concava su $]-\infty, 2[$, convessa su $]2, +\infty[$.




$\boxed{2}$ a) La funzione $y_1(t)$ è definita e derivabile su $[0, \pi/2]$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_1'(t) = 4t\sqrt{y_1(t)+1}$ per ogni $t \in [0, \pi/2]$. Si ha

$$y_1'(t) = 2\cos t \operatorname{sen} t,$$

$$4t\sqrt{y_1(t)+1} = 4t\sqrt{-\cos^2 t + 1} = 4t\sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = 4t \operatorname{sen} t.$$

Si osserva che, ad esempio per $t = \pi/2$

$$0 = y_1'(\pi/2) \neq 4\frac{\pi}{2}\sqrt{y_1(\pi/2)+1} = 2\pi$$

quindi $y_1$ non è soluzione dell'equazione.

b) La funzione $y_2(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_2'(t) = 4t\sqrt{y_2(t)+1}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$y_2'(t) = 4t^3 + 8t,$$

$$4t\sqrt{y_2(t)+1} = 4t\sqrt{(t^4+4t^2+3)+1} = 4t\sqrt{(t^2+2)^2} = 4t(t^2+2) = 4t^3 + 8t.$$

In conclusione si ha che $y_2'(t) = 4t\sqrt{y_2(t)+1}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque $y_2$ è soluzione.

$\boxed{3}$ La funzione $y(t)$ è definita e derivabile in $\mathbb{R}$ e si ha

$$y'(t) = e^{2t}2 - 4t + 2, \qquad y''(t) = 4e^{2t} - 4.$$

Sostituendo si ottiene l'equazione

$$4e^{2t} - 4 - (e^{2t}2 - 4t + 2) - 2(e^{2t} - 2t^2 + 2t - 3) = 4t^2$$

cioè

$$-4 + 4t - 2 + 4t^2 - 4t + 6 = 4t^2$$

che è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$. Dunque $y$ è soluzione dell'equazione data.